Université de Gabès

Faculté des Sciences de Gabès

Département de Mathématiques

Cours d'Analyse Fonctionnelle

Pr. Adel SADDI

adel saddi

Gabès, le 12 décembre 2022

Table des matières

1 Rappel sur la topologie d'un espace métrique **3**

2 Théorème de Stone-Weierstrass et Théorème d'Ascoli **16**

2.1 Théorème de Stone-Weierstrass 16

2.2 Théorème d'Ascoli 25

2.3 Application : (Problème de Cauchy) 28

3 Théorème de Hahn-Banach **31**

4 Grands théorèmes de l'analyse fonctionnelle **41**

5 Espaces de Hilbert **49**

5.1 Espace préhilbertien 49

5.2 Espaces de Hilbert 54

5.3 Projection sur un convexe fermé 57

5.4 Dualité et convergence faible 60

adel saddi

Chapitre I

Rappel sur la topologie d'un espace métrique

Soit $X \neq \emptyset$. d est une distance sur X, si $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une application vérifiant

1. $d(x,y) \geq 0 \; \forall\, x, y \in X$ et $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.
2. $d(x,y) = d(y,x), \quad \forall\, x, y \in X$.
3. $d(x,z) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad \forall\, x, y, z \in X$.

On dit que (X,d) est un espace métrique.

Exemples 1.0.1. • $(\mathbb{R}, d)$ *avec* $d(x,y) = |x-y|$ *est un espace métrique.*

• $(\mathbb{K}^n, d_i)$ *avec* $i = 1, 2, \ldots, \infty, \mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

• $d_1(x,y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$.

• $d_2(x,y) = \Big(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$.

• $d_\infty(x,y) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$.

d_1, d_2, d_∞ sont des distances sur $\mathbb{K}^n$. De plus on a,

$$d_\infty \leq d_2 \leq d_1 \leq n d_\infty.$$

Dans la suite X désignera un espace métrique.

Définition 1.0.2. *Un espace métrique (X,d) est dit complet si toute suite de Cauchy de X est convergente.*

Proposition 1.0.3. *Toute partie complète d'un espace métrique est fermée.*

adelsaddi

Preuve. Soit (X, d) espace métrique et $Y \subset X$ complet. Soit $(x_n)_n \subset Y$ tel que $(x_n)_n$ converge dans X. Soit $x = \lim_n x_n$. Montrons que $x \in Y$. Comme $(x_n)_n$ converge dans X alors elle est de Cauchy dans X mais $(x_n)_n$ est contenue dans Y alors $(x_n)_n$ est de Cauchy dans Y qui est complet, donc $(x_n)_n$ converge dans Y ou encore $x \in Y$. Donc Y est fermé. ■

Définition 1.0.4. *(Bolzano-Weierstrass)*
Soit $K \subset X$, K est dit compact si de toute suite de K, on peut extraire une sous suite convergente dans K.

Remarque 1.0.5.

- *K compact $\Longrightarrow$ K fermé.*
- *K compact $\Longrightarrow$ K bornée.*
- *Toute partie fermé d'un compact est compact.*
- *$K \subset X$ finie $\Longrightarrow$ K compact.*
- *Si $(x_n)_n \subset X$ et $x = \lim_n x_n$ alors $K = \{x_n,\, n \geq 0\}$ est compact ssi $x \in K$.*
  En particulier $A = \{x_n,\, n \geq 0\} \cup \{x\}$ est compact.

Théorème 1.0.6. *(Borel-Lebesgue)*
Soit $K \subset X$ est compact si et seulement si de tout recouvrement d'ouverts de K il existe une sous recouvrement fini. c-à-d, Si $(O_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts de X telle que $K \subseteq \bigcup_{i\in I} O_i$ alors il existe $J \subset I$ fini tel que $K \subseteq \bigcup_{i\in J} O_i$.

Théorème 1.0.7. *Tout espace compact est complet. La réciproque est fausse.*

Preuve. Soit $(x_n)_n \subset X$ une suite de Cauchy. Si X est compact alors $(x_n)_n$ admet une sous suite convergente dans X, d'où $(x_n)_n$ est convergente et X est donc complet. ■

Exemple 1.0.8. $(\mathbb{R}, |\ |)$ *est complet non compact.*

Définition 1.0.9. *Soit (X, d) un espace métrique. On dit que X est précompact si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $x_1, x_2, \ldots, x_p \in X$ tels que $X \subset \bigcup_{i=1}^{p} B(x_i, \epsilon)$.*

Remarque 1.0.10. • $(\mathbb{R}, |\ |)$, *$\mathbb{R}$ n'est pas précompact.*

adel saddi

- *Toute partie bornée de $\mathbb{K}^n$ est précompact.*
- *Un compact est toujours précompact.*
- *Un précompact n'est pas en général un compact* ($]a, b[$).

Théorème 1.0.11. *Soit X un espace métrique précompact. Alors pour tout $Y \subset X$ on a*

1. *(Y, d) est précompact.*
2. *$(\bar{Y}, d)$ est précompact.*

Preuve.

1. Soit (X, d) précompact et $Y \subset X$. Soit $\epsilon > 0$, il existe $x_1, x_2, \ldots, x_p \in X$ tels que $X = \bigcup_{i=1}^{p} B(x_i, \frac{\epsilon}{2})$. D'où $Y = X \cap Y = \bigcup_{i=1}^{p} B(x_i, \frac{\epsilon}{2}) \cap Y$.
   Le problème ici est que les x_i ne sont pas nécessairement tous dans Y.
   Soit A l'ensemble des indices $i = 1, \ldots, p$ tels que $B(x_i, \frac{\epsilon}{2}) \bigcap Y \neq \emptyset$. Donc pour tout $i \in A$ il existe $y_i \in Y \bigcap B(x_i, \frac{\epsilon}{2})$. On obtient alors $Y \subset \bigcup_{i \in A} B(x_i, \frac{\epsilon}{2}) \subset \bigcup_{i \in A} B(y_i, \epsilon)$.
2. Soit $\epsilon > 0$, il existe $x_1, \ldots, x_p \in Y$ tels que $Y \subset \bigcup_{i=1}^{p} B(x_i, \frac{\epsilon}{2})$.

$$\Longrightarrow \overline{Y} \subset \overline{\bigcup_{i=1}^{p} B(x_i, \frac{\epsilon}{2})} = \bigcup_{i=1}^{p} \overline{B(x_i, \frac{\epsilon}{2})} \subset \bigcup_{i=1}^{p} B(x_i, \epsilon).$$

■

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{\text{Compact}} & \longrightarrow & \boxed{\text{complet}} & \longrightarrow & \boxed{\text{fermé}} \\ \downarrow & & & & \\ \boxed{\text{précompact}} & & & & \end{array}$$

Théorème 1.0.12. *Soit (X, d) un espace métrique alors les deux assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *X est compact.*
2. *X est précompact et complet.*

adel saddi

Preuve. 1) $\Longrightarrow$ 2) Soit (X,d) un espace métrique compact. Si $\epsilon > 0$ alors $(B(x,\epsilon))_{x\in X}$ est un recouvrement d'ouverts de X. D'aprés le Théorème de Borel Lebesgue, il existe $x_1, x_2, \ldots, x_p \in X$ tels que $X = \bigcup_{i=1}^{p} B(x_i,\epsilon)$. D'où X est précompact. D'autre part un espace métrique compact est toujours complet. D'où X est précompact et complet.

2) $\Longrightarrow$ 1) Soit X précompact et complet, on suppose que X n'est pas compact. Soit $(\epsilon_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle de $\mathbb{R}_+^*$ convergente vers 0. Comme X est précompact il existe $x_1, \ldots, x_p \in X$ tels que $X \subseteq \bigcup_{i=1}^{p} B(x_i,\epsilon_0) \subset \bigcup_{i=1}^{p} \overline{B}(x_i,\epsilon_0)$. Comme X n'est pas compact, on peut trouver un recouvrement $(U_n)_{n\geq 0}$ de X tel que aucune sous famille finie de $(U_n)_n$ recouvre X. En particulier il existe $i_0 \in \{1, 2....p\}$ tel que aucune sous famille finie de $(U_n)_n$ recouvre $\overline{B}(x_{i_0},\epsilon_0)$. On recommence le même raisonnement avec le sous espace $B_0 = \overline{B}(x_{i_0},\epsilon_0)$, il existe $y_1, y_2, \ldots, y_q \in B_0$ tels que $B_0 \subset \bigcup_{i=1}^{q} B(y_i,\epsilon_1) \subset \bigcup_{i=1}^{q} \overline{B}(y_i,\epsilon_1)$.

On pose $B_1 = \overline{B}(y_{i_1},\epsilon_1)$ tel que B_1 ne peut pas être recouvert par aucune sous famille finie de $(U_n)_n$. Ainsi, on construit une suite décroissante $(B_n)_n$ de boules fermées de diamètres tendant vers 0 de X qui est complet alors $\bigcap_n B_n = \{x\}$ avec $x \in X$. Or $x \in X = \bigcup_n U_n$, il existe $p \geq 0$ tel que $x \in U_p$ qui est ouvert alors il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(x,\epsilon) \subset U_p$. D'autre part, x appartient à toutes les boules B_n dont le rayon $\epsilon_n \longrightarrow 0$. Alors il existe $q \geq 1$ (suffisament grand) tel que $B_q \subset B(x,\epsilon) \subset U_p$, donc B_q est recouvrable par une sous famille finie de $(U_n)_n$. D'où la contradiction, X est alors compact. ■

Définition 1.0.13. *Soit (X,d) un espace métrique et $Y \subset X$. On dit que Y est relativement compact si son adhérence $\overline{Y}$ est compact.*

Exercice 1.0.14. *Dans $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$, soit $A = [0,1] \times \{0\} \bigcup \{0\} \times [0,1]$, (A, d_∞) est un espace métrique. Déterminer $B(a, \frac{1}{2})$ où $a = (\frac{1}{2}, 0)$.*

$$\begin{aligned} B(a,\frac{1}{2}) &= B((\frac{1}{2},0),\frac{1}{2}) \\ &= \{(x,y) \in A / d_\infty((x,y),(\frac{1}{2},0)) < \frac{1}{2}\} \\ &= \{(x,y) \in A / \max\left(\left|x-\frac{1}{2}\right|, |y|\right) < \frac{1}{2}\} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow B(a,\frac{1}{2}) =]0,1[\times\{0\}$.

adelsaddi

$\overline{B}(a, \frac{1}{2}) = [0,1] \times \{0\} \bigcup \{0\} \times [0, \frac{1}{2}]$.
$\overline{B(a, \frac{1}{2})} = \overline{]0,1[\times\{0\}} = [0,1] \times \{0\}$.

Exercice 1.0.15. *Soit (X, d) un espace métrique.*

1. *Soit $(F_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante de fermés de X et $(x_n)_n$ une suite de X convergente telle que $x_n \in F_n$ pour tout n. Montrer que la limite de $(x_n)_n$ est dans $\bigcap_{n\geq 0} F_n$. Donner un exemple pour lequel $\bigcap_{n\geq 0} F_n = \emptyset$.*
2. *Soit maintenant $(K_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante des compacts non vides de X. Vérifier que $K = \bigcap_{n\geq 0} K_n$ est non vide et que tout ouvert contenant K contient tous les K_n à partir d'un certain rang.*

Réponse 1.0.16. 1. *Soit $p \geq 0$.*

$$\begin{aligned} x_p &\in F_p \\ x_{p+1} &\in F_{p+1} \subset F_p \\ &\vdots \\ x_{p+n} &\in F_{p+n} \subset F_p \end{aligned}$$

Comme F_p est fermé alors $\lim_n x_{p+n} \in F_p$. Ensuite $\lim_n x_n \in \bigcap_{n\geq 0} F_n$.
Dans $(\mathbb{R}, |\,.\,|)$. Soit $n \geq 0$, $F_n = [n, +\infty[$, $(F_n)_n$ est une suite décroissante de fermés de $\mathbb{R}$ et non vide mais $\bigcap_n F_n = \emptyset$.

2. *$\forall\, n \geq \emptyset$, $K_n \neq \emptyset \Longrightarrow \forall\, n \geq 0$ il existe $x_n \in K_n \subset K_0$, $(x_n)_n$ est une suite du compact K_0, il existe alors une sous suite $(x_{\varphi(n)})_n$ convergente. D'après 1), $\lim_n x_{\varphi(n)} \in \bigcap_n K_{\varphi(n)}$.*
De plus $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante donc $\varphi(n) \geq n$ pour tout n.
En particulier $K_{\varphi(n)} \subset K_n$. D'où $\lim_n x_{\varphi(n)} \in \bigcap_n K_{\varphi(n)} \subset \bigcap_n K_n$. En particulier $K = \bigcap_n K_n$ est non vide.

Remarque 1.0.17. *On a $\{\varphi(n),\, n \geq 0\} \subset \{n \geq 0\}$. D'où*

$$\bigcap_n K_n \subset \bigcap_n K_{\varphi(n)} \quad \text{et} \quad \bigcap_n K_n = \bigcap_n K_{\varphi(n)}.$$

adel saddi

Soit U un ouvert contenant K. Montrer qu'il existe un certain rang $p \geq 0$ tel que

$$\forall\, n \geq p,\ K_n \subset U.$$

Supposons le contraire :
Il existe φ une application strictement croissante sur $\mathbb{N}$ telle que $K_{\varphi(p)} \bigcap U^c \neq \emptyset$ pour tout $p \geq 0$. $\left(K_{\varphi(p)} \bigcap U^c\right)_p$ est une suite décroissante de compacts non vides. D'après ce qui précède

$$\bigcap_p (K_{\varphi(p)} \bigcap U^c) \neq \emptyset \Rightarrow K \bigcap U^c = \Big(\bigcap_p K_{\varphi(p)}\Big) \bigcap U^c = \bigcap_p \Big(K_{\varphi(p)} \bigcap U^c\Big) \neq \emptyset.$$

Donc $K \nsubseteq U$ ce qui est absurde. D'où tous les K_n sont contenus dans U à partir d'un certain rang.

Définition 1.0.18. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On appelle norme sur E toute application N de E dans $\mathbb{R}$ vérifiant :*

1. $N(x) \geq 0$, $\forall\, x \in E$ *et* $N(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.
2. $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall\, x \in E$.
3. $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$, $\forall\, x, y \in E$.

Si N est une norme sur E, on définit l'application

$$\begin{array}{rcl} d : E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & d(x,y) = N(x-y). \end{array}$$

d est une distance sur N dite associée à N et (E,d) est l'espace métrique associé à l'espace vectoriel normé (E,N). (E,N) est dit espace de Banach si (E,d) est complet.

Définition 1.0.19. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application f de E dans F ($f : E \longrightarrow F$) est dite linéaire si :*

1. $\forall x, y \in E$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$.
2. $\forall x \in E$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

ou encore $\forall x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$.

adel saddi

Remarque 1.0.20. *Si $f : E \longrightarrow F$ linéaire alors $f(0_E) = 0_F$.*
On note $\ker(f) = \{x \in E / f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$ *et* $Im(f) = \{f(x),\, x \in E\}$.
$\ker(f)$ *est un sous espace vectoriel de E et $Im(f)$ est un sous espace vectoriel de F.*

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés et f une application linéaire de E dans F. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f continue.
2. f continue en 0
3. f est bornée (Il existe $c > 0$ tel que $\|f(x)\|_F \leq c\|x\|_E$).
4. f est Lipschitzienne.

Notation :

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F et $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$.

Remarque 1.0.21.
1. *Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors* $\ker(f)$ *est un espace vectoriel fermé de E.*
2. $\mathcal{L}(\mathbb{R}) = \{f_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} / f_a(x) = ax,\, a \in \mathbb{R}\}$ *l'ensemble des applications linéaire sur $\mathbb{R}$.*
3. $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ *c'est à dire $\forall\, f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ telle que $f(x) = Mx$.*
4. *Si* $\dim E < \infty$ *et $f : E \longrightarrow F$ linéaire alors f est continue.*
   Supposons que $\dim E = n$ *et $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E. Si $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, alors*

$$\begin{aligned}
\|f(x)\|_F &= \|f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i)\|_F \\
&= \|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i)\|_F \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \|f(e_i)\|_F \\
&= \Big(\sum_{i=1}^{n} \|f(e_i)\|_F\Big) \|x\|_\infty
\end{aligned}$$

   Donc f est borné, par suite f est continue.

adel saddi

Définition 1.0.22. *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, on pose $\|f\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|f(x)\|$. L'application $f \longrightarrow \|f\|$ définit une norme sur $\mathcal{L}(E,F)$ dite norme d'opérateurs.*

En effet,

1. Pour tout $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $\|f\| \geq 0$. De plus

$$\begin{aligned}
\|f\| = 0 &\iff \sup_{\|x\|\leq 1} \|f(x)\| = 0 \\
&\iff \forall\, x \in E,\ \|x\| \leq 1,\ \|f(x)\| = 0 \\
&\iff \forall\, x \in E\backslash\{0\},\ \|f(x)\| = \|f(\frac{x}{\|x\|})\| = 0 \\
&\iff f(x) = 0\, \forall\, x \in E\backslash\{0\} \\
&\iff f \equiv 0 \text{ (puisque } f(0) = 0).
\end{aligned}$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

$$\begin{aligned}
\|\lambda f\| &= \sup_{\|x\|\leq 1} \|(\lambda f)(x)\| \\
&= \sup_{\|x\|\leq 1} \Big(|\lambda|\|f(x)\|\Big) \\
&= |\lambda| \sup_{\|x\|\leq 1} \|f(x)\| \\
&= |\lambda|\|f\|
\end{aligned}$$

3. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$

$$\begin{aligned}
\|f+g\| &= \sup_{\|x\|\leq 1} \|(f+g)(x)\| \\
&= \sup_{\|x\|\leq 1} \|f(x)+g(x)\| \\
&\leq \sup_{\|x\|\leq 1} \Big(\|f(x)\| + \|g(x)\|\Big) \\
&\leq \sup_{\|x\|\leq 1} \|f(x)\| + \sup_{\|x\|\leq 1} \|g(x)\| \\
&= \|f\| + \|g\|.
\end{aligned}$$

Remarque 1.0.23. $\forall\, f \in \mathcal{L}(E,F)$

$$\sup_{\|x\|\leq 1} \|f(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}.$$

adel saddi

Posons $A = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|f(x)\|$, $B = \sup\limits_{\|x\|=1} \|f(x)\|$, $C = \sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{\|f(x)\|}{\|x\|}$.
On a $\{x \in E,\ \|x\| = 1\} \subseteq \{x \in E,\ \|x\| \leq 1\}$ *alors* $B = \sup\limits_{\|x\|=1} \|f(x)\| \leq \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|f(x)\| = A$.
Soit $x \in E \setminus \{0\}$, *alors* $y = \frac{x}{\|x\|} \in \{u \in E\,, \|u\| = 1\}$, *d'où* $\|f(y)\| \leq B$.
Donc $\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \leq B$, $\forall\, x \neq 0 \iff \forall\, x \in E,\ \|f(x)\| \leq B\|x\|$.
Par suite $A = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|f(x)\| \leq B$. *D'où* $A = B$.
De plus

$$\begin{aligned} C &= \sup_{x\neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \\ &= \sup_{x\neq 0} \|f\Big(\frac{x}{\|x\|}\Big)\| \\ &= \sup\{\|f(y)\|,\ y = \frac{x}{\|x\|},\ x \neq 0\} \\ &\leq \sup\{\|f(y)\|,\ \|y\| = 1\} = B. \end{aligned}$$

Soit $x \in E$, $\|x\| = 1$ *on a*

$$\|f(x)\| = \|f\Big(\frac{x}{\|x\|}\Big)\| = \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \leq C.$$

D'où $B = \sup\limits_{\|x\|=1} \|f(x)\| \leq C$. *Ainsi* $A = B = C$, *et* $\forall\, x \in E,\ \|f(x)\| \leq \|f\|\|x\|$.

Exemples 1.0.24. *1. Soit* $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{K})$ *muni de* $\|\,.\,\|_\infty$. *Posons*

$$\begin{aligned} T : E &\longrightarrow E \\ f &\longmapsto T(f)\,/T(f)(t) = tf(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(f+g)(t) &= t(f+g)(t) \\ &= tf(t) + tg(t) \\ &= T(f)(t) + T(g)(t) \\ &= (T(f) + T(g))(t). \end{aligned}$$

adel saddi

$$\begin{aligned} T(\lambda f)(t) &= t(\lambda f)(t) \\ &= t\lambda f(t) \\ &= \lambda t f(t) \\ &= \lambda T(f)(t) \\ &= (\lambda T(f))(t). \end{aligned}$$

D'où T est linéaire sur E.

Soit $f \in E$ et $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned} \|T(f)\| &= \sup_{t\in[0,1]} |T(f)(t)| \\ &= \sup_{t\in[0,1]} |tf(t)| \\ &\leq \sup_{t\in[0,1]} \|f(t)| \\ &= \|f\|_\infty \end{aligned}$$

D'où $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\|T\| \leq 1$. De plus pour $f_0 \equiv 1$, on a $\|f_0\|_\infty = \|f\|_\infty = 1$.

$\|T(f_0)\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0,1]} |t| = 1.$

D'où

$$\|T\| = \sup_{\|f\|\leq 1} \|T(f)\|_\infty \geq \|T(f_0)\|_\infty.$$

Ainsi $\|T\| = 1$.

2. *Soit $l^2(\mathbb{K}) = \{(x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{C} / \sum\limits_n |x_n|^2 < +\infty\}$.*

   Pour $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in l^2(\mathbb{C})$, $\|x\|_2 = \Big(\sum\limits_{n\geq 1} |x_n|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$, $(l^2(\mathbb{K}), \|.\|_2)$ est un espace de Banach (Hilbert).

   On pose

$$\begin{aligned} G : l^2(\mathbb{K}) &\longrightarrow l^2(\mathbb{K}) \\ x &\longmapsto Gx = (x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D : l^2(\mathbb{K}) &\longrightarrow l^2(\mathbb{K}) \\ x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) &\longmapsto Dx = (0, x_1, \ldots, x_n, \ldots) \end{aligned}$$

adel saddi

Soient $x = \{(x_n)\}_{n\geq 1}$, $y = \{(y_n)\}_{n\geq 1}$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} G(x+y) &= T\Big((x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n, \ldots)\Big) \\ &= (x_2+y_2, x_3+y_3 \ldots, x_n+y_n, \ldots) \\ &= (x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots) + (y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots) \\ &= Gx + Gy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(\lambda x) &= T(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n, \ldots) \\ &= (\lambda x_2, \lambda x_3, \ldots, \lambda x_n, \ldots) \\ &= \lambda(x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots) \\ &= \lambda G(x) \end{aligned}$$

$\forall\, x = \{(x_n)\}_{n\geq 1} \in l^2(\mathbb{K})$

$$\begin{aligned} \|Gx\|_2^2 &= \|(x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)\|_2^2 \\ &= \sum_{n\geq 2} |x_n|^2 \\ &\leq \sum_{n\geq 1} |x_n|^2 = \|x\|_2^2 \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\|Gx\|_2 \leq \|x\|_2. \tag{1.0.1}$$

De même

$$\begin{aligned} \|Dx\|_2^2 &= \|(0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)\|_2^2 \\ &= \sum_{n\geq 1} |x_n|^2 \\ &= \|x\|_2^2 \end{aligned}$$

D'où $\forall\, x \in l^2(\mathbb{K})$ $\|Dx\|_2 = \|x\|_2$. *Ainsi* $D \in \mathcal{L}\Big(l^2(\mathbb{K})\Big)$ *et* $\|D\| = 1$.
D'après l'inégalité (1.0.1) $G \in \mathcal{L}\Big(l^2(\mathbb{K})\Big)$ *et* $\|G\| \leq 1$. *De plus pour* $x_0 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$,

adel saddi

$x_0 \in l^2(\mathbb{K})$ et $\|x_0\| = 1$ et $Gx_0 = (1, 0, \ldots, 0)$, on a, $\|Gx_0\|_2 = 1$, d'où $\|G\| \geq \|Gx_0\|_2 = 1$, on obtient ainsi $\|T\| = 1$.

Exercice 1.0.25. *Soit $(\alpha_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{C}$ une suite bornée et*

$$\begin{aligned} T : l^2(\mathbb{C}) &\longrightarrow l^2(\mathbb{C}) \\ x = (x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots) &\longmapsto Tx = (\alpha_0 x_0, \alpha_1 x_1, \ldots, \alpha_n x_n, \ldots) = (\alpha_n x_n)_{n\geq 0} \end{aligned}$$

Montrer que $T \in \mathcal{L}\Big(l^2(\mathbb{C})\Big)$ et déterminer sa norme $\|T\|$.

Théorème 1.0.26. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$ espace vectoriel normé. Si F est un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(E, F)$ l'est aussi.*

Preuve. Soit $(T_n)_n$ une suite de Cauchy de $\mathcal{L}(E, F)$. Soit $\epsilon > 0$, il existe $N > 0$ tel que $\forall\, p, q \in \mathbb{N}$ $p \geq N$, $q \geq N$ $\|T_p - T_q\| < \epsilon$.
$\Longrightarrow$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, p, q \geq N$, $p \geq N$, $q \geq N$, $\sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|(T_p - T_q)(x)\| < \epsilon$.
$\Longrightarrow$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, p, q \geq N$, $p \geq N$, $q \geq N$, $\forall\, \|x\| \leq 1$, $\|T_p x - T_q x\| < \epsilon$ $\qquad (*)$
D'où $\forall\, x \in E$, $(T_n x)_n$ est une suite de Cauchy dans F. Or F est un espace de Banach donc $(T_n x)_n$ est convergente dans F. Soit

$$\begin{aligned} T : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto Tx = \lim_n T_n x \end{aligned}$$

En particulier, d'après $(*)$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, p \in \mathbb{N}, p \geq N, \forall\, \|x\| \leq 1, \|T_p x - Tx\| < \epsilon, \quad (**).$$

Soient $x, x' \in E$

$$\begin{aligned} T(x + x') &= \lim_n T_n(x + x') \\ &= \lim_n (T_n x + T_n x') \\ &= \lim_n T_n x + \lim_n T_n x'. \end{aligned}$$

adelsaddi

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in E$,

$$\begin{aligned} T(\lambda x) &= \lim_n T_n(\lambda x) \\ &= \lambda \lim_n T_n x \\ &= \lambda T x. \end{aligned}$$

Soit $x \in E$,

$$\begin{aligned} \|Tx\| &\leq \|T_N x\| + \|T_N x - Tx\| \\ &\leq C_N \|x\| + \epsilon \|x\| \\ &= (C_N + \epsilon)\|x\|. \end{aligned}$$

D'où $T \in \mathcal{L}(E, F)$. de plus, d'après $(**)$, $\lim_n T_n = T$ dans $\mathcal{L}(E, F)$ et donc $\mathcal{L}(E, F)$ est de Banach. ■

Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$. Alors l'espace de formes linéaires E' sur E est dit dual algébrique de E et l'espace de formes linéaires continues $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est dit le dual topologique de E

Corollaire 1.0.27. *Soit E un espace vectoriel normé. Alors le dual topologique de E est un espace de Banach.*

adel saddi

Chapitre II

Théorème de Stone-Weierstrass et Théorème d'Ascoli

2.1 Théorème de Stone-Weierstrass

Soit E un espace vectoriel normé et "." une deuxième loi de composition interne de E. On dit que $(E, .)$ est une algèbre :

• Si $\|x.y\| \leq \|x\|\|y\|, \quad \forall\, x, y \in E$.

Soit E une algèbre et $A \subset E$, on dit que A est une sous algèbre de E si :

• A est un sous-espace vectoriel de E et stable par rapport à la loi ".". c-à-d $\forall\, x, y \in A,\ x.y \in A$.

• Une algèbre A est dite de Banach si A est complet.

• Soit (K, d) un espace métrique compact. Posons $E = \mathcal{C}(K)$ l'espace de fonctions (réelles ou complexes) continues sur K.

On munit E de la norme uniforme, c'est à dire : $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in K} |f(x)|$, $\mathcal{C}(K)$ est une algèbre puisque $\forall\, f, g \in \mathcal{C}(K)$, $fg \in \mathcal{C}(K)$ et on a

$$\begin{aligned}
\|fg\|_\infty &= \sup_{x\in K} |f(x)g(x)| \\
&= \sup_{x\in K} |f(x)||g(x)| \\
&\leq \sup_{x\in K} (|f(x)|\|g\|_\infty) \\
&= \|f\|_\infty \|g\|_\infty.
\end{aligned}$$

adel saddi

- $\mathcal{L}(E)$ est une algèbre en effet : $\forall\, T, S \in \mathcal{L}(E)$, $\forall\, x \in E$,

$$\begin{aligned} \|(T \circ S)(x)\| &= \|T(Sx)\| \\ &\leq \|T\|\|Sx\| \\ &\leq \|T\|\|S\|\|x\|. \end{aligned}$$

D'où

$$\|T \circ S\| \leq \|T\|\|S\|.$$

Remarque 2.1.1. *$\mathcal{C}(K)$ et $\mathcal{L}(E)$ sont des algèbres de Banach pourvu que K est un compact et E est de Banach.*

Remarque 2.1.2. *La fonction $t \longmapsto |t|$ n'est pas un polynôme sur $\mathbb{R}$ puique cette fonction n'est pas dérivable en 0 mais tout polynôme est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Cependant nous le résultat fondamental suivant.*

Lemme 2.1.3. *Il existe une suite de fonctions polynômiales convergeant uniformement vers $|t|$ sur $[-1, 1]$.*

Preuve. Soit

$$P_0 = 0, \quad P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2}(t^2 - P_n^2(t)) \text{ pour tout } n \geq 0. \tag{2.1.1}$$

$(P_n)_{n\geq 0}$ est une suite de polynômes vérifiant :

$$|t| - P_{n+1}(t) = |t| - P_n(t) - \frac{1}{2}(|t| - P_n(t))(|t| + P_n(t)) \tag{2.1.2}$$

$$= (|t| - P_n(t))(1 - \frac{1}{2}(|t| + P_n(t))). \tag{2.1.3}$$

Par récurrence, on montre que $0 \leq P_n(t) \leq |t|$, $\forall\, n \geq 0$, $\forall\, |t| \leq 1$.

En effet on a $0 \leq 0 = P_0(t) \leq |t|, \quad \forall\, |t| \leq 1$.

Supposons $0 \leq P_{n_0}(t) \leq |t|, \quad \forall\, |t| \leq 1$.

On a $|t| + P_{n_0}(t) \leq 2|t| \Longrightarrow 1 - \frac{1}{2}(|t| + P_{n_0}(t)) \geq 1 - \frac{1}{2}(2|t|) = 1 - |t| \geq 0$, $\forall\, |t| \leq 1$.

D'après (2.1.3), on obtient $|t| - P_{n_0+1}(t) \geq 0$. De plus $0 \leq P_{n_0}(t) \leq |t|$, alors (2.1.1) donne $P_{n_0+1}(t) \geq 0$.

adel saddi

(2.1.2) implique aussi que pour tout $|t| \leq 1$, $P_{n+1}(t) - P_n(t) = \frac{1}{2}(t^2 - P_n^2(t)) \geq 0$, donc $\forall\, |t| \leq 1$, $(P_n(t))_n$ croissante et majorée par $|t|$, donc $(P_n)_n$ converge simplement sur $[-1, 1]$.
Si $f(t) = \lim\limits_n P_n(t), \quad \forall\, |t| \leq 1$, alors $f(t) = f(t) + \frac{1}{2}(t^2 - f^2(t))$, $\forall\, |t| \leq 1$.
D'où $f(t) = |t|$.
Comme $(P_n)_n$ est une suite croissante de fonctions continues et converge simplement vers la fonction continue $f(t) = |t|$ sur $[-1, 1]$, alors le théorème de Dini assure la convergence uniforme de $(P_n)_n$ vers $|t|$ sur $[-1, 1]$.
On donne également une preuve directe de la convergence uniforme de $(P_n)_n$ vers $|t|$ sur $[-1, 1]$.
D'après 2.1.3, on obtient

$$\begin{aligned} |t| - P_n(t) &\leq (|t| - P_{n-1}(t))(1 - \frac{1}{2}|t|) \qquad (2.1.4)\\ |t| - P_{n-1}(t) &\leq (|t| - P_{n-2}(t))(1 - \frac{1}{2}|t|) \\ &\vdots \\ |t| - P_1(t) &\leq (|t| - P_0(t))(1 - \frac{1}{2}|t|). \end{aligned}$$

D'où $|t| - P_n(t) \leq |t|(1 - \frac{1}{2}|t|)^n \leq \min((1 - \frac{1}{2}|t|)^n, |t|)$, $\forall\, n, \forall |t| \leq 1$.
Soit $0 < \epsilon < 1$.

$$\sup_{|t|\leq 1} ||t| - P_n(t)| = \max(\sup_{|t|<\epsilon} ||t| - P_n(t)|, \sup_{\epsilon\leq|t|\leq 1} ||t| - P_n(t)|).$$

On a $\sup\limits_{\epsilon\leq|t|\leq 1} ||t| - P_n(t)| \leq \sup\limits_{\epsilon\leq|t|\leq 1} (1 - \frac{1}{2}|t|)^n \leq (1 - \frac{1}{2}\epsilon)^n$ et $\sup\limits_{|t|\leq\epsilon} ||t| - P_n(t)| \leq \sup\limits_{|t|\leq\epsilon} |t| \leq \epsilon$.
Donc $\lim\limits_n \sup\limits_{|t|\leq 1} ||t| - P_n(t)| = 0$ et $(P_n)_n$ converge uniformément vers $|t|$ sur $[-1, 1]$. ■

Corollaire 2.1.4. *Soit A une sous-Algèbre de $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$. Si $f \in A$ alors $|f| \in \overline{A}$ et si $f, g \in A$ alors $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$ sont également dans $\overline{A}$.*

Preuve. Soit $f \in A$, on suppose que $\|f\|_\infty \leq 1$. D'après le lemme 2.1.3, il existe une suite de polynômes $(P_n)_n \in \mathbb{R}[X]$ telle que $(P_n)_n$ converge uniformément vers $[t \longmapsto |t|]$ sur $[-1, 1]$.
On a $\sup\limits_{t\in K} |P_n(|f(t)|) - |f(t)|| \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$.
C'est à dire $\sup\limits_{t\in K} |P_n(f)(t) - |f(t)|| \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$.
Comme $f \in A$ alors $P_n(f) \in A$, c'est à dire $|f| = \lim\limits_n P_n(f)$ dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$. Donc $|f| \in \overline{A}$.

adel saddi

Soient $f, g \in A$, on a $\sup(f,g) = \frac{1}{2}(\underbrace{f+g}_{\in A} + \underbrace{|f-g|}_{\in \overline{A}}) \Longrightarrow \sup(f,g) \in \overline{A}$. De même $\inf(f,g) = \frac{1}{2}(\underbrace{f+g}_{\in A} - \underbrace{|f-g|}_{\in \overline{A}}) \in \overline{A}$. ■

Remarque 2.1.5. *Soit A une sous algèbre de $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$. Alors pour tout $f \in A$, $f^+ = \sup(f,0)$ et $f^- = -\inf(f,0)$ appartiennent à $\overline{A}$.*

Définition 2.1.6. *Soit A est une sous algèbre de $\mathcal{C}(K)$. On dit que A sépare les points de K si pour tout couple $(x,y) \in K \times K$, $x \neq y$, il existe $f \in A$ tel que $f(x) \neq f(y)$.*

Lemme 2.1.7. *Soit A une sous-algèbre de $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$. On suppose que A contient les fonctions constantes et sépare les points de K. Alors A vérifie la propriété d'interpolation suivante :*
Pour tout couple $(x,y) \in K \times K$ tel que $x \neq y$ et pour tout couple $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, il existe une fonction $f \in A$ telle que $f(x) = \alpha$ et $f(y) = \beta$.

Preuve. Soient $x, y \in K$, $x \neq y$ comme A sépare les points de K, il existe une fonction $g \in A$ telle que $g(x) \neq g(y)$.
On considère le systéme linéaire suivant : $\begin{cases} \lambda g(x) + \mu = \alpha, \\ \lambda g(y) + \mu = \beta. \end{cases}$
où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \lambda, \mu$ sont les inconnus. Le determinant de la matrice associée est non nul, donc le système possède une solution unique $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Posons $f = \underbrace{\lambda g}_{\in A} + \underbrace{\mu}_{\in A}$. On a $f \in A$ vérifiant $f(x) = \lambda g(x) + \mu = \alpha$ et $f(y) = \lambda g(y) + \mu = \beta$. ■

Théorème 2.1.8. *(Stone-Weierstrass cas réel)*
Soit A une sous algèbre de $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$. On suppose A contient les fonctions constantes et sépare les points de K. Alors A est dense dans $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$.

Preuve.
Pour cela, on a besoin de montrer que $\overline{A} = \mathcal{C}(K,\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \forall\, \varphi \in \mathcal{C}(K,\mathbb{R})$, il existe $(\varphi_n)_n \subset A$ telle que $\lim\limits_n \varphi_n = \varphi$ dans A.
$\Longleftrightarrow \forall\, \varphi \in \mathcal{C}(K,\mathbb{R})$, $\forall\, \epsilon > 0$, il existe $f \in A$ telle que $\|\varphi - f\|_\infty < \epsilon$.
$\Longleftrightarrow \forall\, \varphi \in \mathcal{C}(K,\mathbb{R})$, $\forall\, \epsilon > 0$, il existe $f \in \overline{A}$ telle que $\|\varphi - f\|_\infty < \epsilon$.

adel saddi

Etape 1 :

Soit $\epsilon > 0$ et $\varphi \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$. $\forall\, x \in K$, on cherche $f_x \in \overline{A}$ telle que $f_x(x) = \varphi(x)$ et $f_x > \varphi - \epsilon$?.

Soit $x \in K$, pour tout $y \in K$, on peut grâce au lemme 2.1.7 trouver une fonction $f^y \in A$ telle que $f^y(x) = \varphi(x)$ et $f^y(y) = \varphi(y)$. Comme f^y et φ sont continues sur K donc en particulier en y, il existe un voisinage ouvert V^y de y tel que $f^y > \varphi - \epsilon$ sur V^y.

La famille de $(V^y)_{y\in K}$ constitue un recouvrement d'ouverts de K. Comme K est compact, il existe alors $y_1, y_2, \ldots, y_p \in K$ tels que $K = \bigcup_{i=1}^{p} V^{y_i}$.

D'après le corollaire 2.1.4 $f_x = \sup(f^{y_1}, f^{y_2}, \ldots, f^{y_p}) \in \overline{A}$. De plus $f_x(x) = \varphi(x)$ et $f_x > \varphi - \epsilon$ sur K.

Etape2 : Existence de f :

$\forall\, x \in K$, soit f_x la fonction donnée dans l'étape 1 $\Big(f_x(x) = \varphi(x)$ et $f_x > \varphi - \epsilon,\ f_x \in \overline{A}\Big)$. D'après la continuité de f_x et φ en x, il existe un voisinage ouvert V_x de x tel que $f_x < \varphi + \epsilon$ sur V_x. On a $K = \bigcup_{x\in K} V_x$ qui est compact, donc il existe $x_1, \ldots, x_n \in K$ tel que $K = \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}$. On pose $f = \inf(f_{x_1}, f_{x_2}, \ldots, f_{x_n})$ on a bien $f \in \overline{\overline{A}} = \overline{A}$ vérifiant $\forall\, x \in K$, $f(x) \leq f_{x_i}(x) < \varphi(x) + \epsilon$. D'autre part $f_{x_i}(x) > \varphi(x) - \epsilon$, $\forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$. Ainsi $f(x) = \inf(f_{x_1}(x), \ldots, f_{x_n}(x)) > \varphi(x) - \epsilon$, d'où $\forall\, x \in K$, $\varphi(x) - \epsilon < f(x) < \varphi(x) + \epsilon \Longleftrightarrow \|f - \varphi\|_\infty < \epsilon$, où $f \in \overline{A}$ donc $\overline{A} = \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$. ■

Définition 2.1.9. *Une sous algèbre A de $\mathcal{C}(K)$ est dite auto-conjuguée si pour tout $f \in A$, $\overline{f}$ l'est aussi.*

Théorème 2.1.10. *(Stone-Weierstrass cas complexe) :*

Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{C}(K, \mathbb{C})$ contenant les fonctions constantes, sépare les points de K et auto-conjugué. Alors A est dense dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{C})$.

Preuve. On suppose que $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre contenant les constantes sépare les points de K et auto-conjuguée.

On pose $\mathcal{B} = \mathcal{A} \bigcap \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$. $\mathcal{B}$ est un sous algèbre de $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ contenant les constantes et pour tout $f \in \mathcal{A}$, on a $Re(f) = \frac{f+\overline{f}}{2}$ et $Im(f) = \frac{f-\overline{f}}{2i}$ appartiennent à $\mathcal{B}$ donc $\mathcal{B}$ sépare les points de K. D'après le théorème de Stone-Weierstrass réel, $\mathcal{B}$ est dense dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$, d'où $\mathcal{A} = \mathcal{B} + i\mathcal{B}$ est dense dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{C})$. ■

adel saddi

Corollaire 2.1.11. *Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$. Alors l'espace des fonctions polynômiales réelles est dense dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. Plus généralement si K est un compact de $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, alors l'espace des fonctions polynômiales réelles en d variables $x_1, x_2, \ldots, x_d$ est dense dans $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$.*

Remarques 2.1.12. *1) $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue alors la suite des polynômes $(B_n)_n$ donnée par $B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})\mathcal{C}_n^k x^k (1-x)^{n-k}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$. $(B_n)_n$ est dite suite de Bernstein.*

2) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, continue à support compact (il existe K compact de $\mathbb{R}$ tel que $f \equiv 0$ sur K^c). Soit également $k_n = c_n(1-x^2)^n \mathbb{I}_{[-1,1]}(x)$ tel que $\int_{-1}^{1} k_n(x)dx = 1$. Posons

$$P_n(x) = (k_n * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} k_n(y) f(x-y)dy.$$

Le produit de convolution P_n de k_n et f est un polynôme de $\mathbb{R}_{2n}[X]$. $(P_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]$, $\Big(P_n(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)k_n(x-y)dy,\ |x| \leq \dfrac{1}{2}\Big)$.

3) La sous algèbre $\mathbb{C}[X]$ n'est pas dense dans $\mathcal{C}(\overline{D})$. Sinon $z \to \overline{z}$ devrait être holomorphe sur $D = \{z \in \mathbb{C}/|z| < 1\}$.

Corollaire 2.1.13. *Toute fonction continue 2π-périodique $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est limite uniforme de polynômes trigonométriques $(P(x) = Q(cos(x), sin(x)) = S(e^{ix}, e^{-ix})$ avec $Q, S \in \mathbb{C}[X,Y]$.*

Preuve. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue 2π-périodique. Notons $\mathcal{A}$ la sous-algèbre de $\mathcal{C}(D)$ engendré par les fonctions constantes, les fonctions $z \longrightarrow z$ et $z \longrightarrow \frac{1}{z}$ c'est à dire

$$\mathcal{A} = \{f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}/f(z) = \sum_{k \in I} \alpha_k z^k,\ I \subset \mathbb{Z}, I \text{ fini et } \alpha_k \in \mathbb{C}\}.$$

Par construction $\mathcal{A}$ contient les constantes, sépare les points et elle est auto-conjuguée, en effet,

$$f(z) = \sum_{\substack{k \in I \\ I\ fini}} \alpha_k z^k \Longrightarrow \overline{f}(z) = \sum_{\substack{k \in I \\ I\ fini}} \overline{\alpha_k} \overline{z}^k = \sum_{\substack{k \in J=-I \\ I\ fini}} \overline{\alpha_{-k}} z^k.$$

D'après le théorème de Stone-Weierstrass

$$\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{C}(\mathbb{T}). \tag{2.1.5}$$

adel saddi

On pose maintenant $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}/|z| = 1\}$ et on définit la fonction $\widetilde{f} : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $\widetilde{f}(e^{it}) = f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Alors $\widetilde{f}$ est continue, en effet : Soit F un fermé de $\mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}^{-1}(F) &= \{z \in \mathbb{C}/\widetilde{f}(z) \in F\} \\
&= \{e^{it} \in \mathbb{T}/\widetilde{f}(e^{it}) \in F\} \\
&= \{e^{it} \in \mathbb{T}/f(t) \in F\}.
\end{aligned}$$

D'où $\widetilde{f}^{-1}(F) = \mathbb{T} \bigcap f^{-1}(F))$ est un fermé de $\mathbb{T}$.
Soit $\epsilon > 0$, d'après (2.1.5), il existe $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{A}$ tel que $\|\widetilde{\varphi} - \widetilde{f}\| < \epsilon$.
Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ tel que $\varphi(t) = \widetilde{\varphi}(e^{it}) = \sum\limits_{\substack{k \in I \\ I\, fini}} \alpha_k e^{ikt} = \sum\limits_{\substack{k \in I \\ I\, fini}} (\beta_k \cos(kt) + \gamma_k \sin(kt))$.
On a

$$\begin{aligned}
\|\varphi - f\|_\infty &= \sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi(t) - f(t)| \\
&= \sup_{t \in [0,2\pi]} |\widetilde{\varphi}(e^{it}) - \widetilde{f}(e^{it})| \\
&= \sup_{z \in \mathbb{T}} |\widetilde{\varphi}(z) - \widetilde{f}(z)| \\
&= \|\widetilde{\varphi} - \widetilde{f}\|_\infty < \epsilon,
\end{aligned}$$

où φ est un polynôme trigonométrique. D'où la conclusion. ■

Rappel :

Soient (X, d) et (Y, d') deux espaces métriques et $f : X \longrightarrow Y$ une application de X dans Y. f est dite k-lipschitzienne s'il existe $k > 0$ tel que : $\forall\, x, y \in X/d'(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$. f est dite aussi k-lipschitzienne ou lipschitzienne de rapport k.

Fin de Rappel

Corollaire 2.1.14. *Soit (K, d) un espace métrique compact. Alors l'espace des fonctions lipschitziennes est dense dans $\mathcal{C}(K)$.*

Preuve. Soit $Lip(K)$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes de K dans $\mathbb{K}$. Il est clair que cet ensemble est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(K)$. $Lip(K)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(K)$ contenant

adel saddi

les constantes. De plus si $f \in Lip(K)$, alors pour tous $x, y \in K$

$$\begin{aligned} |\overline{f}(x) - \overline{f}(y)| &= |\overline{f(x)} - \overline{f(y)}| \\ &= |\overline{f(x) - f(y)}| \\ &= |f(x) - f(y)| \leq kd(x, y). \end{aligned}$$

Donc $\overline{f} \in Lip(K)$ et $Lip(K)$ est auto-conjuguée.

Soient $a, b \in K$, $a \neq b$ et posons $f(x) = d(a, x)$, $\forall\, x \in K$. On a $f \in Lip(K)$, $f(a) = 0 \neq d(a, b) = f(b)$. Donc d'après le théorème de Stone-Weierstrass $Lip(K)$ est dense dans $\mathcal{C}(K)$. ■

Exercice 2.1.15. *Soit (K, d) un espace métrique compact et $f \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$. Pour tout $\lambda > 0$, on pose*

$$f_\lambda(x) = \inf_{y \in K} \{f(y) + \lambda d(x, y)\}.$$

Montrer que

1. *f_λ est λ-lipschitzienne et $f_\lambda \leq f$.*
2. *$(f_\lambda)_\lambda$ converge uniformément vers f sur K quand $\lambda \longrightarrow +\infty$.*

Corollaire 2.1.16. *Soient (K, d) et (K, d') deux espaces métriques compacts. Alors l'espace vectoriel $\mathcal{F}(K \otimes L)$ engendré par les fonctions $f \in \mathcal{C}(K \times L)$ de la forme*

$$f(x, y) = u(x)v(y)$$

où $u \in \mathcal{C}(K)$ et $v \in \mathcal{C}(L)$ est dense dans $\mathcal{C}(K \times L)$.

Preuve. $\mathcal{F}(K \otimes L)$ est une sous algèbre de $\mathcal{C}(K \times L)$ contenant les constantes et auto-conjuguée. De plus, si $(x, y) \neq (x', y') \in K \times L$ on pose :

$$f(u, v) = d(u, x) + d'(v, y),\ (u, v) \in K \times L.$$

Alors $f \in \mathcal{F}(K \otimes L)$ et $f(x, y) = 0$ et $f(x', y') = d(x', x) + d'(y', y) > 0$. Donc $\mathcal{F}(K \otimes L)$ sépare les points de $K \times L$. D'après le théorème de Stone-Weierstrass $\mathcal{F}(K \otimes L)$ est dense dans $\mathcal{C}(K \times L)$. ■

adel saddi

Définition 2.1.17. *Un espace métrique (E,d) est dit séparable s'il contient une partie dénombrable dense.*

(E,d) est séparable s'il existe $D \subset E$ tel que D est dénombrable et $\overline{D} = E$

(E,d) est séparable s'il existe $D = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\} \subset E$ et $\overline{D} = E$.

Théorème 2.1.18. *Tout espace métrique compact est séparable.*

Preuve. Soit (K,d) espace métrique compact, alors il est précompact, donc pour tout $\epsilon > 0$, il existe $x_1, \ldots, x_p \in K$ tels que $K = \bigcup_{i=1}^{p} B(x_i, \epsilon)$.

Soit $n \geq 1$, il existe $x_1^n, \ldots, x_{p_n}^n \in K$ tels que $K = \bigcup_{i=1}^{p_n} B(x_i^n, \frac{1}{n})$.

On pose $D = \{x_1^1, \ldots, x_{p_1}^1, x_1^2, \ldots, x_{p_2}^2, \ldots, x_1^n, \ldots, x_{p_n}^n, \ldots\}$.

D est dénombrable. Soit $x \in K$ et $\epsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geq n_0$, $\frac{1}{n} < \epsilon$. D'autre part il existe $i_0 \in \{1, \ldots, p_{n_0}\}$ tel que $x \in B(x_{i_0}^{n_0}, \frac{1}{n_0})$ avec $x_{i_0}^{n_0} \in K \bigcap D = D$. D'où $d(x, x_{i_0}^{n_0}) < \frac{1}{n_0} < \epsilon$. D'où $x_{i_0}^{n_0} \in D \bigcap B(x, \epsilon)$. Ainsi $\overline{D} = K$. ■

Théorème 2.1.19. *Soit (K,d) un espace métrique compact. Alors $\mathcal{C}(K)$ est séparable.*

Preuve. Soit (K,d) un espace métrique compact et $D = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ une partie dénombrable dense de K. Pour tout $n \geq 1$, on pose $f_n(x) = d(x, a_n)$, on a f_n est continue sur K à valeurs dans $\mathbb{R}$ pour tout $n \geq 1$. Soit A la sous-algèbre de $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ engendrée par la famille $\{f_n,\ n \geq 0\}$ avec $f_0 = 1$.

A contient les constantes et sépare les points de K, puisque , si $a, b \in K$, $a \neq b$, alors il existe une sous suite $a_{\varphi(n)_n}$ de $(a_n)_n$ telle que $\lim_n a_{\varphi(n)} = a$. Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geq n_0$. $d(a_{\varphi(n)}, a) < \frac{d(a,b)}{2}$. D'où $d(a_{\varphi(n)}, b) \geq \frac{d(a,b)}{2}$, $\forall\, n \geq n_0$.

Sinon,

$$\begin{aligned} d(a,b) &\leq d(a, a_{\varphi(n)}) + d(a_{\varphi(n)}, b) \\ &< \frac{d(a,b)}{2} + \frac{d(a,b)}{2} = d(a,b). \end{aligned}$$

Ce qui est faux. Ainsi on obtient

$$f_{\varphi(n_0)}(a) = d(a_{\varphi(n_0)}, a) < \frac{d(a,b)}{2} \leq d(a_{\varphi(n_0)}, b) = f_{\varphi(n_0)}(b),$$

adel saddi

D'où $\overline{A} = \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$, d'après le théorème de Stone-Weierstrass réel. $\big[$Grâce à la densité de Q dans $\mathbb{R}$. Toute fonction de $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ est limite uniforme de combinaisons linéaire à coefficients rationnelles de fonctions f de type $f = \prod_{i \in I} f_i$ où I est un sous ensemble fini de $\mathbb{N}$, $f_i \in A$ $\big]$. Ainsi $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ est séparable. Comme $\mathcal{C}(K, \mathbb{C}) = \mathcal{C}(K, \mathbb{R}) + i\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ alors $\mathcal{C}(K, \mathbb{C})$ est aussi séparable.
■

2.2 Théorème d'Ascoli

Soit (E, d) et (E, d') deux espaces métriques. On note $\mathcal{C}(E, F)$ l'ensemble des fonctions continues de E dans F et soit $\mathcal{F}$ une sous famille de $\mathcal{C}(E, F)$.

Définition 2.2.1. *On dit que $\mathcal{F}$ est équicontinue en x, si pour tout $\epsilon > 0$,*
il existe $\gamma(x, \epsilon) > 0 \,/\, \forall\, y \in E\; d(x, y) < \gamma \Longrightarrow \forall\, f \in \mathcal{F},\; d'(f(x), f(y)) < \epsilon$.
$\mathcal{F}$ est dite équicontinue si $\mathcal{F}$ est équicontinue en tout $x \in E$.
$\forall\, \epsilon > 0,\; \forall\, x \in E,\; \exists\; \gamma(x, \epsilon) > 0\; \forall\, y \in E,\; d(x, y) < \gamma \Longrightarrow \forall\, f \in \mathcal{F},\; d'(f(x), f(y)) < \epsilon$.

Remarque 2.2.2. *L'équicontinuité de $\mathcal{F}$ en x, implique la continuité de tout $f \in \mathcal{F}$ en x. Dans la définition l'existence de $\gamma = \gamma(x, \epsilon) > 0$ est uniformément choisi (où le même) pour toutes les applications $f \in \mathcal{F}$.*

Notation 2.2.3. *Si $(f_n)_{n \geq p}$ est une suite de $\mathcal{C}(E, F)$, on dit que la suite $(f_n)_{n \geq p}$ est équicontinue si la famille $\mathcal{F} = \{f_n \,/\, n \geq p\}$ est équicontinue.*

Exemples 2.2.4.

1. *Toute famille finie de $\mathcal{C}(E, F)$ est équicontinue.*
2. *Si $\mathcal{F} : \{f : E \longrightarrow E,\, k\text{-lipschitzienne}\}$, $k > 0$ fixé. On prend $\gamma(x, \epsilon) = \frac{\epsilon}{k}$, alors $\mathcal{F}$ équicontinue de plus,*
   si $\mathcal{F} : \{f : E \longrightarrow F \,/\, \forall\, x \in E,\; \exists\; V_x \subset \mathcal{V}(x)$ ouvert tel que $f|_{V_x}$ est k_x-lipschitzienne$\}$. Alors $\mathcal{F}$ est équicontinue.
3. *Si E et F deux espaces vectoriel normé et $c > 0$, $\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{L}(E, F),\; \|f\| \leq c\}$, alors $\mathcal{F}$ est équicontinue $\forall\, f \in \mathcal{F}$, $\|f(x) - f(y)\| < c\|x - y\|$, $\forall\, x, y \in E$. Cas particulier de 2).*

adel saddi

4. *Soit* $f_n(t) = \sin(\sqrt{t + 4(n\pi)^2})$, $t \geq 0$ *et* $n \geq 0$ *et* $\mathcal{F} = \{f_n \,/\, n \geq 0\}$. *Alors* $\mathcal{F}$ *est équicontinue sur* $[0, +\infty[$.

Théorème 2.2.5. *(Théorème d'Ascoli)*
Soient K *un espace métrique compact et* $(f_n)_n$ *une suite bornée et équicontinue de* $\mathcal{C}(K)$. *Alors* $(f_n)_n$ *possède une sous suite uniformément convergente.*

La preuve de ce théorème repose sur le lemme suivant.

Lemme 2.2.6. *(convergence "forcée")*
Soit (E, d) *un espace métrique,* (F, d') *un espace métrique complet et* $(g_n)_n$ *une suite équicontinue de* $\mathcal{C}(E, F)$. *On suppose également qu'il existe une partie dense* D *de* E *telle que la suite* $(g_n)_n$ *converge simplement sur* D.

1. *La suite* $(g_n)_n$ *converge simplement sur* E.
2. *La convergence est uniforme sur tout compact de* E.
3. *La fonction* $g = \lim\limits_n g_n$ *est continue.*

Preuve. Comme F est supposé complet, on obtient 1) et 2) si on montre que la suite $(g_n)_n$ satisfait le critère de la cauchy uniforme sur tout compact de E.
Soient $K \subset E$ un compact fixé et $\epsilon > 0$. Comme $(g_n)_n$ équicontinue, alors $\forall\, a \in E$, il existe $\delta_a > 0$ tel que

$$\forall\, x \in E,\ d(x, a) < \delta_a \Longrightarrow \forall\, n,\ d'(g_n(x), g_n(a)) < \epsilon. \tag{2.2.1}$$

Posons $B_a = B(a, \delta_a)$ la boule ouverte. $\forall\, a \in E$, on obtient la propriété suivante :
• $\forall\, u, v \in B_a$, $\forall\, n\ d'(g_n(u), g_n(v)) < 2\epsilon$. La famille $(B_a)_{a \in K}$ constitue un recouvrement d'ouverts du compact K. Il existe alors $a_1, \ldots, a_p \in K$ tels que $K \subset B_{a_1} \bigcup \ldots B_{a_p}$. De plus D est dense dans E, donc chaque ouvert B_{a_i} contient un $z_i \in D$. Posons $Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_p\}$. Par définition de Z, à tout $x \in K$, on peut lui associer $z_x \in Z \bigcap D$ tel que x et z_x sont dans le même ouvert B_a. D'après (2.2.1), on obtient, $\forall\, x \in K$, $d'(g_n(x), g_n(z_x)) < 2\epsilon$ et donc

$$\begin{aligned} d'(g_p(x), g_q(x)) &\leq d'(g_p(x), g_p(z_x)) + d'(g_p(z_x), g_q(z_x)) + d'(g_q(z_x), g_q(x)) \\ &< 4\epsilon + d'(g_p(z_x), g_q(z_x)). \end{aligned}$$

adel saddi

Comme $(g_k)_k$ converge simplement sur D et $z_x \in D$, il existe $N_{z_x} \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, p, q \geq N$, $d'(g_p(z_x), g_q(z_x)) < \epsilon$. Ainsi, il existe $N_{z_x} \in \mathbb{N}$, $(N = \max\limits_{x \in K} N_{z_x})$.
$\forall\, p, q \geq N \Longrightarrow \forall\, x \in K$, $d'(g_q(x), g_q(x)) < 5\epsilon$. D'où les propriétés 1) et 2).
Posons $g(x) = \lim\limits_n g_n(x)\ \forall\, x \in E$. En faisant tendre n vers l'infini dans (2.2.1) on obtient $\forall\, x \in \theta_a$, $d'(g(x), g(a)) < \epsilon$. D'où g est continue en a. ■

Preuve. (Théorème d'Ascoli)
Soit $(f_n)_n$ une suite bornée et equicontinue de $\mathcal{C}(K)$. Comme K est un espace métrique compact, donc il est séparable. Soit $D \subset K$ une partie dénombrable et dense dans K. Comme $(f_n)_n$ est bornée, elle possède une sous suite $(g_n)_n$ de $(f_n)_n$ telle que la suite numérique $(g_n(z))_n$ est convergente pour tout $z \in D$. D'après le lemme 2.2.6, $(g_n)_n$ converge uniformément sur le compact K. ■

Exemple 2.2.7. *Soit $f_n(t) = t^n, t \in [0,1]$ et $n \geq 1$. La suite $(f_n)_n$ n'est pas équicontinue sur $[0,1]$ puisque aucune sous suite de $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.*

Théorème 2.2.8. *Soit K un espace métrique compact. Alors les parties compactes de $\mathcal{C}(K)$ sont exactement les parties fermées, bornées et équicontinues.*

Preuve. D'après le théorème d'Ascoli 2.2.5, il est clair que les parties bornées et équicontinues sont relativement compactes, donc les parties fermées, bornées et équicontinues de $\mathcal{C}(K)$ sont compactes.
Réciproquement : Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(K)$ est compacte, alors $\mathcal{F}$ est fermée et bornée.
Reste à montrer que $\mathcal{F}$ est équicontinue. Soit $n \geq 0$, on définit .

$$\begin{aligned} \phi_n : F &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \phi_n(f) = \sup\{|f(x) - f(y)|,\ d(x,y) < 2^{-n}\}. \end{aligned}$$

- $\forall\, f$, $\phi_n(f) \longrightarrow 0$.
- $\forall\, f$, $(\phi_n(f))_n \searrow$.

D'après le théorème de Dini, $(\phi_n)_n$ converge uniformément sur $\mathcal{F}$ vers 0. Ainsi $\sup\limits_{f \in \mathcal{F}} |\phi_n(f)| \longrightarrow 0$.
$\Longleftrightarrow \forall\, \epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, n \geq N,\ \forall\, f \in \mathcal{F},\ \forall\, x, y \in K,\ d(x,y) < 2^{-n},\ |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

adel saddi

$\Longrightarrow \forall\, \epsilon > 0$, il existe $\gamma = 2^{-N}$,

$$\forall\, x, y \in K,\ d(x,y) < \gamma, \forall\, f \in \mathcal{F},\ |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

D'où $\mathcal{F}$ est équicontinue. ■

Corollaire 2.2.9. *(Théorème d'Ascoli)*
Soient (E,d) un espace métrique séparable, (F,d) espace métrique et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathcal{C}(E,F)$. On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

1. *Pour tout $x \in E$, l'ensemble $\{f_n(x),\, n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact dans F.*
2. *La suite $(f_n)_n$ est équicontinue.*

Alors $(f_n)_n$ possède une sous suite uniformément convergente sur tout compact de E.

Corollaire 2.2.10. *Soient E et F deux espaces métriques compacts si $(f_n)_n \subset \mathcal{C}(E,F)$ est équicontinue alors $(f_n)_n$ possède une sous suite uniformément convergente.*

2.3 Application : (Problème de Cauchy)

Soient X un espace de Banach et $f : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \overline{B}(x_0, r) \to X$, où $x_0 \in X$ et $t_0 \in \mathbb{R}$, $\alpha, r > 0$, on considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{2.3.1}$$

Théorème 2.3.1. *(Cauchy Lipschitz)*
On suppose les hypothèses suivantes :

1. *f continue sur $\mathcal{C} = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \overline{B}(x_0, r)$ et lipschitzienne par rapport à la variable $x \in \overline{B}(x_0, r)$.*
2. *Il existe une constante $M > 0$ telle que*

$$\forall\, (t,x) \in \mathcal{C},\ \|f(t,x)\| \leq M, \text{ et } \alpha M \leq r.$$

adel saddi

Alors le problème de Cauchy (2.3.1) possède une unique solution $x : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \longrightarrow \overline{B}(x_0, r)$

Ici, on démontre le résultat suivant.

Théorème 2.3.2. *(Peano)*

Soit X un espace de dimension finie et on suppose les hypothèses suivantes :

1. *La fonction f est continue sur $K = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \overline{B}(x_0, r)$.*
2. *Il existe une constante $M \geq 0$ telle que $\|f(t, x)\| \leq M$ sur K avec $\alpha M \leq r$.*

Alors le problème de Cauchy (2.3.1) possède au moins une solution $x : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \longrightarrow \overline{B}(x_0, r)$.

Preuve. L'idée est d'approcher f par des fonctions auxquelles, on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz, ensuite on utilise le théorème d'Ascoli pour conclure.
Comme X est de dimension finie alors $K = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \overline{B}(x_0, r)$ est un compact de $\mathbb{R} \times X$. Notons $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ de la forme $f = \phi|_K$ où ϕ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times X$. Il est clair que $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$. De plus $\mathcal{A}$ sépare les points de K. D'après le théorème de Stone-Weierstrass. $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$. Par le théorème de Tietze la fonction f se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R} \times X$. On note par f ce prolongement. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times X$ et à valeurs dans X qui converge uniformément vers f sur K. On peut supposer de plus que $\|f_n\| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (quitte à remplacer f_n par $c_n f_n$ où $c_n = \frac{\|f\| M}{2^{-n} + \|f_n\|}$).
Comme chaque f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times X$ alors sa restriction sur K est lipschitzienne d'après l'inégalité des accroissements finis comme $\|f(t, x)\| \leq M$ pour tout $(t, x) \in K$. On peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe alors une fonction $x_n : I = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \longrightarrow \overline{B}(x_0, r)$ solution du problème de Cauchy (2.3.1) associée à f_n et $(t_0, x_0) \in K$. On a, ainsi

$$x_n(t) = x_n(t_0) + \int_{t_0}^{t} f_n(s, x_n(s)) ds, \tag{2.3.2}$$

pour tout $t \in I$.
Comme les x_n sont à valeurs dans $\overline{B}(x_0, r)$, la suite $(x_n)_n$ est bornée dans $\mathcal{C}(K, X)$. De plus on a $\|x_n'(t)\| = \|f_n(t, x_n)\| \leq M$. pour tout $t \in I$. Donc chaque fonction x_n est M-lipschitzienne

adel saddi

donc la suite $(x_n)_n$ est équicontinue sur le compact I.

D'après le théorème d'Ascoli $(x_n)_n$ admet une sous suite $(x_{\varphi(n)})_n$ uniformément convergente vers une fonction continue $x : I \longrightarrow X$.

De plus on a $x(t) \in \overline{B}(x_0, r)$, pour tout $t \in I$, car toutes les x_n dans $\overline{B}(x_0, r)$ qui est fermé dans X.

Pour $t \in I$ et $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned}
\|f_{\varphi(n)}(t, x_{\varphi(n)}(t)) - f(t, x(t))\| &\leq \|f_{\varphi(n)}(t, x_{\varphi(n)}(t)) - f(t, x_{\varphi(n)}(t))\| + \|f(t, x_{\varphi(n)}(t)) - f(t, x(t))\| \\
&\leq \|f_{\varphi(n)} - f\| + \|f(t, x_{\varphi(n)}(t)) - f(t, x(t))\|.
\end{aligned}$$

Comme $(f_{\varphi(n)})_n$ converge uniformément sur K et f est continue sur le compact K, donc f est uniformément continue sur K, on conclut que $(f_{\varphi(n)}(t, x_{\varphi(n)}(t)))_n$ converge uniformément vers f sur I. En passant à la limite dans (2.3.2), on obtient $x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(t, x(t))dt$. D'où $x'(t) = f(t, x(t))$ et x est une solution du problème de Cauchy (2.3.1). ■

adel saddi

Chapitre III

Théorème de Hahn-Banach

Soit E un ensemble non vide muni d'une relation d'ordre " $\leq$ ", $(E, \leq)$ est dit ensemble ordonné. On dit que E est totalement ordonné si pour tous $x, y \in E$, $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Définition 3.0.3. *Soit E un ensemble ordonné. On dit que E est inductif si toute partie totalement ordonnée de E admet un majorant. (Pour tout $F \subset E$ totalement ordonné, il existe $a \in E$ tel que, $\forall x \in F$, $x \leq a$).*

Lemme 3.0.4. *(Lemme de Zorn)*
Tout ensemble ordonné et inductif admet un élément maximal.

Remarque 3.0.5. *Le lemme de Zorn est équivalent au lemme suivant : Pour tout ensemble non vide X, il existe une application*

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{P}(X) &\longrightarrow X \\ A &\longmapsto \phi(A) \ / \ \phi(A) \in A. \end{aligned}$$

Théorème 3.0.6. *(Théorème de Hahn-Banach cas réel)*
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et p une application de E dans $\mathbb{R}_+$ tels que

1. $p(x+y) \leq p(x) + p(y), \ \ \forall x, y \in E$
2. $p(\lambda x) = \lambda p(x), \forall x \in E, \lambda \geq 0.$

Soit F un sous espace vectoriel de E et ℓ une forme linéaire sur F telle que

$$\ell(x) \leq p(x), \quad \forall x \in F. \tag{3.0.1}$$

Alors ℓ se prolonge en une forme linéaire $\widetilde{\ell}$ sur E vérifiant

$$\widetilde{\ell}(x) \leq p(x), \ \ \forall x \in E. \tag{3.0.2}$$

adel saddi

Preuve.

On commence par supposer que F est de codimension 1 dans E. C'est à dire il existe $0 \neq y \in E$ telle que $E = F \oplus \langle y \rangle$.

On cherche à prolonger ℓ en $\widetilde{\ell}$ à E en préservant (3.0.1).

Pour cela, on cherche $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\widetilde{\ell}(x + ty) = \ell(x) + ta, \quad \forall x \in F, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

et vérifiant

$$\widetilde{\ell}(x + ty) \leq p(x + ty), \quad \forall x \in F, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Comme

$$\forall t \neq 0 \quad \widetilde{\ell}(x + ty) = t\widetilde{\ell}(\frac{x}{t} + y),$$

il suffit alors de trouver $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\widetilde{\ell}(x \pm y) \quad \leq \quad p(x \pm y), \ \forall y \in F.$$

$\Longrightarrow \ell(x) + a \leq p(x + y), \quad \forall x \in F$ et $\ell(x) - a \leq p(x - y), \quad \forall x \in F$, où de manière équivalente trouver $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\ell(x) - p(x - y) \leq a \leq p(x + y) - \ell(x), \quad \forall x \in F.$$

Or pour tout $z, z' \in F$ on a

$$\ell(z) + \ell(z') \leq p(z + z') \leq p(z + y) + p(z' - y),$$

d'où

$$\ell(z') - p(z' - y) \leq p(z + y) - \ell(z).$$

$\forall z, z' \in F$ on obtient alors

$$\sup_{x \in F}(\ell(x) - p(x - y)) \leq p(z + y) - \ell(z), \quad \forall z \in F.$$

De plus,

$$\sup_{x \in F}\Big(\ell(x) - p(x - y)\Big) \leq \inf_{x \in F}\Big(p(x + y) - \ell(x)\Big).$$

adel saddi

Ainsi pour tout $a \in \left[\sup_{x\in F}\Big((\ell(x)-p(x-y)\Big), \inf_{x\in F}\Big(p(x+y)-\ell(x)\Big)\right]$ un tel prolongement $\widetilde{\ell}$ existe.

Si F admet un supplementaire G de dimension finie (F est de codimension finie) alors $E = F \oplus G$.

Supposons que $\{y_1, \ldots, y_p\}$ est une base de G. La construction de $\widetilde{\ell}$ se fait par récurrence finie sur $i = 1, \ldots, p$. D'après le 1er cas si

$$E = F \oplus G = F \oplus \langle y_1\rangle \oplus \langle y_2\rangle + \ldots \oplus \langle y_p\rangle.$$

on pose $F_0 = F, \ell_0 = l$ et $F_i = F_{i-1} + \langle y_i\rangle$, $F_p = E$ $\ell_i/_{F_i} = \ell_{i-1}$ et $\widetilde{\ell} = \ell_p$.

L'importance du théorème est dans sa grande généralité.

Dans la suite, on va utiliser le lemme de Zorn.

Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble formé par le couples (K, m) où K est un sous espace vectoriel de E contenant F et m est une forme linéaire sur K de la façon suivante :

$$m/_F = \ell, \quad et \quad m(x) \leq p(x), \quad \forall\, x \in K.$$

On définit sur $\mathcal{M}$ la relation " $\leq$ " suivante :

$$(K, m) \leq (K', m') \Longleftrightarrow K \subseteq K' \,\text{et}\, m' \,\text{est un prolongement de}\, m \,\text{sur}\, K'.$$

- $\mathcal{M} \neq \emptyset$, il contient (F, ℓ).
- $(\mathcal{M}, \leq)$ est un ensemble ordonné.
- $(\mathcal{M}, \leq)$ est inductif, en effet soit $(K_i, m_i)_{i\in I}$ une famille totalement ordonnée $\mathcal{M}$. Soit $K = \bigcup_{i\in I} K_i$ et $m(x) = m_i(x)$, $\forall\, x \in K_i$.

K est un sous espace vectoriel contenant F et m est une forme linéaire sur K. De plus $m(x) \leq p(x)\, \forall\, x \in k$ et $m/_F = \ell$. D'où le couple (K, m) est un majorant de M. D'après le théorème d'Ascoli $(\mathcal{M}, \leq)$ admet un élément maximal noté $(\widetilde{F}, \widetilde{\ell})$.

Reste à montrer que $\widetilde{F} = E$. Supposons le contraire, il existe alors $y \in E\backslash\widetilde{F}$ d'après le premier cas il existe une forme linéaire $\widetilde{m}$ sur $\widetilde{F} \oplus \langle y\rangle = \widetilde{E}$ telle que $\widetilde{m}/\widetilde{F} = \widetilde{\ell}$ et $\widetilde{m}(x) \leq p(x)$, $\forall\, x \in \widetilde{E}$. $(\widetilde{E}, \widetilde{m})$ est un nouveau majorant de $\mathcal{M}$ différent de $(\widetilde{F}, \widetilde{\ell})$, ce qui est absurde. Donc $\widetilde{F} = E$ et $\widetilde{\ell}$ est la forme linéaire voulue.

■

adel saddi

Théorème 3.0.7. *(Théorème de Hanhn Banach cas complexe)*
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, p une semi-norme sur E et ℓ une forme linéaire sur un sous espace vectoriel F de E vérifiant

$$|\ell(x)| \leq p(x), \quad \forall x \in F. \tag{3.0.3}$$

Alors ℓ se prolonge en une forme linéaire $\widetilde{\ell}$ sur E vérifiant

$$|\widetilde{\ell}(x)| \leq p(x), \quad \forall x \in E. \tag{3.0.4}$$

Preuve.
Soit f une forme linéaire sur le sous espace vectoriel F de E telle que $|f(x)| < p(x)$, $\forall\, x \in F$.
On pose $\ell_1(x) = Re(f(x))$.
On a $f(x) = \ell_1(x) - i\ell_1(ix)\ \forall\, x \in F. \quad (Im(z) = -Re(iz))$.
On a $\ell_1(x) \leq |f(x)| \leq p(x), \ \forall\, x \in F$.
ℓ_1 est une $\mathbb{R}$-forme linéaire sur F vérifiant $\ell_1(x) \leq p(x) \quad \forall\, x \in F$.
D'après le cas réel, il existe une forme linéaire $\widetilde{\ell_1}$ sur E vérifiant $\widetilde{\ell_1}/_F = \ell_1$ et $\widetilde{\ell_1}(x) \leq p(x)$, $\forall\, x \in E$.
On pose $\widetilde{\ell}(x) = \widetilde{\ell_1}(x) - i\widetilde{\ell_1}(ix), \quad \forall\, x \in E$.
$\widetilde{\ell}$ est une forme $\mathbb{C}$-linéaire sur E. En effet, $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in E$,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\ell}(\lambda x) &= \widetilde{\ell_1}(\lambda x) - i\widetilde{\ell_1}(i\lambda x) \\
&= \widetilde{\ell_1}((\alpha + i\beta)x) - i\widetilde{\ell_1}(i(\alpha + i\beta)x) \\
&= \alpha\widetilde{\ell_1}(x) + \beta\widetilde{\ell_1}(ix) - i\alpha\widetilde{\ell_1}(ix) + i\beta\widetilde{\ell_1}(x) \\
&= (\alpha + i\beta)\widetilde{\ell_1}(x) + (\alpha + i\beta)(-i\widetilde{\ell_1}(ix)) \\
&= \lambda\widetilde{\ell}(x).
\end{aligned}$$

adel saddi

Si θ est l'argument de $\widetilde{\ell}(x)$ ($\widetilde{\ell}(x) \neq 0$).

$$\begin{aligned}
|\widetilde{\ell}(x)| &= e^{-i\theta}\widetilde{\ell}(x) \\
&= \widetilde{\ell}(e^{-i\theta}x) \\
&= Re\widetilde{\ell}(e^{-i\theta}x) \\
&= \widetilde{\ell}_1(e^{-i\theta}x) \\
&\leq p(e^{-i\theta}x) \\
&= |e^{-i\theta}|p(x) \\
&= p(x).
\end{aligned}$$

■

Corollaire 3.0.8. *Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$, F sous espace vectoriel de E et ℓ une forme linéaire continue sur F. Alors, il existe une forme linéaire $\widetilde{\ell}$ continue et prolonge ℓ sur E. De plus $\|\widetilde{\ell}\| = \|\ell\|$.*

Preuve. Posons $p(x) = \|\ell\|\|x\|$, $\forall x \in E$.
On a p positive + semiadditive + positivement homogène donc vérifie les hypothèses du théorème de Hahn-Banach.
On a $p : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $p(x) = \|\ell\|\|x\|$ est positive.
$\forall\, x, y \in E$, on a

$$\begin{aligned}
p(x+y) &= \|\ell\|\|x+y\| \\
&\leq \|\ell\|(\|x\| + \|y\|) \\
&= p(x) + p(y).
\end{aligned}$$

$\forall\, \lambda \geq 0$, $\forall x \in E$, $p(\lambda x) = \|\ell\|\|\lambda x\| = |\lambda|\|\ell\|\|x\| = \lambda p(x)$.
De plus $\forall\, x \in F$ $|\ell(x)| \leq \|\ell\|\|x\| = p(x)$.
D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe une forme linéaire $\widetilde{\ell}$ prolongeant ℓ sur E et vérifie $|\widetilde{\ell}(x)| \leq p(x) = \|\ell\|\|x\| \quad \forall\, x \in E$. D'où $\widetilde{\ell}$ est continue sur E et $|\widetilde{\ell}| \leq \|\ell\|$. D'autre part, on a $\|\ell\| = \sup\limits_{\substack{x\in F\\ \|x\|\leq 1}} |\ell(x)| \leq \sup\limits_{\substack{x\in E\\ \|x\|\leq 1}} |\widetilde{\ell}(x)| = ||\widetilde{\ell}||$. Ainsi il existe $\widetilde{\ell} \in E^* = (f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ forme linéaire continue) telle que $\widetilde{\ell}/_F = \ell$ et $\|\widetilde{\ell}\| = \|\ell\|$. ■

adel saddi

Rappel :

Soient X, Y deux espaces métriques et $f : X \longrightarrow Y$ une application.

f est une isométrie $\Longleftrightarrow d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$.

Si X et Y sont deux espaces vectoriels normés.

f est une isométrie $\Longleftrightarrow \|f(x) - f(y)\|_Y = \|x - y\|_X$.

Si f est linéaire alors, f est une isométrie $\Longleftrightarrow \|f(x)\|_Y = \|x\|_X$.

Toute isométrie est continue et toute isométrie linéaire est de norme 1.

Fin de Rappel

Corollaire 3.0.9. *Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ et soit $a \in E$ alors il existe une forme linéaire continue sur E ($l \in E^*$) telle que $\|l\| = 1$ et $l(a) = \|a\|$. En particulier, on a $\|a\| = \sup\limits_{\substack{l \in E^* \\ \|l\|=1}} |l(a)|$ et l'application $\psi : a \in E \longrightarrow J_a \in E^{**}$ telle que $\forall\, l \in E^*$, $J_a(l) = l(a)$, est une isométrie linéaire de E dans E^{**} (bidual $= ((E^*)^*)$.*

Preuve. Soit $a \in E$ $a \neq 0$ et F le sous espace vectoriel engendré par a, $F = \langle a \rangle = \{\lambda a,\ \lambda \in \mathbb{K}\}$.
On définit la forme sur F par $l_0(\lambda a) = \lambda \|a\|$.
On a bien l_0 est linéaire et $\|l_0(x)\| = \|x\|$, $(\lambda a = x)$, $\forall\, x \in F$. D'où l_0 est une forme linéaire continue sur F. D'après le théorème de Hahn Banach, il existe une forme linéaire continue l sur E telle que $l_{/F} = l_0$ et $\|l\| = \|l_0\| = 1$ ($\sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|l_0(x)\| = 1$). De plus $l(a) = l_0(a) = \|a\|$.
Posons $M = \sup\limits_{\substack{l \in E^* \\ \|l\|=1}} |l(a)| \leq \|a\|$. On a $M \leq ||a||$. D'autre part d'après ce qui précède, il existe $f \in E^*$ tel que $f(a) = \|a\|$ et $\|f\| = 1$ donc $f \in \{l \in E^*,\ \|l\| = 1,\ l(a) = \|a\|\}$, et $M = \sup\{|l(a)|, l \in E^*, \|l\| = 1\} \geq \|a\|$. Donc $\forall\, a \in E$; $\|a\| = \sup\limits_{\substack{l \in E^* \\ \|l\|=1}} |l(a)|$.

$\psi : a \in E \longrightarrow J_a \in E^{**}$ telle que $J_a(l) = l(a)$.

$*$ ψ est linéaire :

adel saddi

Soient $a, b \in E$ et $l \in E^*$.

$$\begin{aligned}
\psi(a+b)(l) &= J_{a+b}(l) \\
&= l(a+b) \\
&= l(a) + l(b) \\
&= J_a(l) + J_b(l) \\
&= \psi(a)(l) + \psi(b)(l) \\
&= (\psi(a) + \psi(b))(l).
\end{aligned}$$

D'où $\psi(a+b) = \psi(a) + \psi(b)$.

De plus $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}
\psi(\lambda a)(l) &= J_{\lambda a}(l) = l(\lambda a) \\
&= \lambda l(a) \\
&= \lambda J_a(l) \\
&= \lambda \psi(a)(l) \\
&= (\lambda \psi(a))(l).
\end{aligned}$$

Donc $\psi(\lambda a) = \lambda \psi(a)$.

$*$ ψ est une isométrie.

$\forall\, a \in E$

$$\begin{aligned}
\|\psi(a)\| &= \|J_a\| \\
&= \sup_{\substack{l \in E^* \\ \|l\|=1}} |J_a(l)| \\
&= \sup_{\substack{l \in E^* \\ \|l\|=1}} |l(a)| \\
&= \|a\|.
\end{aligned}$$

■

Remarque 3.0.10. *L'application ψ est une isométrie linéaire de E dans E^{**}(bidual). ψ est dite l'injection canonique de E dans E^{**}.*

adel saddi

Définition 3.0.11. *Soit E un espace vectoriel normé. On dit E est réflexif si l'injection canonique $\psi : E \longrightarrow E^{**}$ est surjective.*

Rappel :

Soit E un espace vectoriel normé et F un sous espace vectoriel de E. On pose

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x - y \in F, \forall\, x, y \in E.$$

$$E_{/_{\mathcal{R}}} = E_{/_F} = \{\overline{x},\, x \in E\}, \text{ on pose } |||\overline{x}||| = d(x, F),\ d(x, F) = \inf_{y\in F} \|x - y\|.$$

$$\bullet\ \forall\, x \in E, |||\overline{x}||| = d(x, F) \geq 0.$$

$$\bullet\ \forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ x \in E,$$

$$\begin{aligned}
|||\lambda\overline{x}||| &= |||\overline{\lambda x}||| \\
&= d(\lambda x, F) \\
&= \inf_{y\in F} \|\lambda x - y\| \\
&= \begin{cases} 0, & \lambda = 0; \\ \inf\limits_{y\in F} \|\lambda(x - \dfrac{y}{\lambda})\|, & \lambda \neq 0. \end{cases} \\
&= |\lambda| \inf_{y\in F} \|x - \frac{y}{\lambda}\| \\
&= |\lambda| \inf_{z\in F} \|x - z\| \\
&= |\lambda| d(x, F) \\
&= |\lambda| |||\overline{x}|||
\end{aligned}$$

$$\bullet\ \forall\, x, y \in E,\ \forall\, z, z' \in F.$$

$$\|x + y - (z + z')\| \leq \|x - z\| + \|y - z'\|.$$

$$|||\overline{x} + \overline{y}||| = d(x + y, F) \leq \|x + y - (z + z')\| \leq \|x - z\| + \|y - z'\| \quad \forall\, z, z' \in F.$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow |||\overline{x} + \overline{y}||| &\leq \inf_{z\in F} (\|x - z\| + \|y - z'\|)\, \forall\, z' \in F. \\
&\leq d(x, F) + \|y - z'\|,\ \forall z' \in F. \\
\Longrightarrow |||\overline{x} + \overline{y}||| &\leq d(x, F) + \inf_{z'\in F} \|y - z'\| \\
&\leq d(x, F) + d(y, F) \\
&\leq |||\overline{x}||| + |||\overline{y}|||.
\end{aligned}$$

adel saddi

Donc l'application $\overline{x} \longrightarrow d(x,F) = |||\overline{x}|||$ est une semi-norme sur $E/_F$. De plus

$$|||\overline{x}||| = 0 \Longleftrightarrow d(x,F) = 0 \Longleftrightarrow x \in F.$$

Ainsi $|||.|||$ est une norme SSi F est un sous espace vectoriel fermé de E.

Fin de Rappel

Corollaire 3.0.12. *Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$. F sous espace vectoriel fermé de E et $a \in E \setminus F$. Alors, il existe une forme linéaire f continue sur E ($f \in E^*$) telle que $f(a) = 1$ et $f_{|F} \equiv 0$.*

Preuve. Soit $a \in E/_F$, on pose $l(\lambda\overline{a}) = \lambda$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$. l est une forme linéaire sur $\langle\overline{a}\rangle$ où $\langle\overline{a}\rangle$ est la droite vectorielle de $E/_F$ engendré par $\overline{a}$.
Soit $x \in \langle\overline{a}\rangle$, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ telle que $x = \lambda\overline{a}$, $|l(x)| = |l(\lambda)\overline{a}| = |\lambda| = \frac{1}{|||\overline{a}|||}|||x|||$. D'où l est une forme linéaire continue sur $\langle\overline{a}\rangle$ et d'après le théorème de Hahn-Banach, il existe $\widetilde{l} \in (E/_F)^*$ vérifiant $\widetilde{l}(\overline{a}) = 1$ et $\|\widetilde{l}\| = \frac{1}{|||\overline{a}|||}$, $\widetilde{l}/_{\langle\overline{a}\rangle} = l$.
On pose $f = \widetilde{l} \circ \pi$ où π la surjection canonique de $E \longrightarrow E/_F$.

$$\begin{array}{rcl} \pi : E & \longrightarrow & E/_F \quad \textit{est linéaire et continue} \\ x & \longmapsto & \overline{x} \end{array}$$

On a bien $f \in E^*$ vérifiant

$$\begin{aligned} f(a) &= (\widetilde{l} \circ \pi)(a) \\ &= \widetilde{l}(\pi(a)) \\ &= \widetilde{l}(\overline{a}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$\forall\, x \in F$, $\overline{x} = \overline{0}$, d'où $f(x) = \widetilde{l}(\overline{0}) = 0$, donc $F \subset \ker(f)$. i.e. $f/_F = 0$. ■

Corollaire 3.0.13. *Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ et F un sous espace vectoriel de E alors*

$$\overline{F} = \bigcap_{\substack{f \in E^* \\ F \subset \ker(f)}} \ker(f).$$

adel saddi

En particulier F est dense dans E SSi toute forme linéaire continue sur E et nulle sur F est identiquement nulle.

Preuve. Posons $G = \bigcap_{\substack{f\in E^* \\ F\subset \ker(f)}} \ker(f)$. On a $\forall f \in E^*$ et $F \subset \ker(f)$ alors $\overline{F} \subset \ker(f)$.

$G = \bigcap_{\substack{f\in E^* \\ F\subset \ker(f)}} \ker(f) \supset \overline{F}$.

Supposons qu'il existe $x \in G\backslash\overline{F}$, d'après le corollaire 3.0.12 il existe $f \in E^*$ telle que $f(x) = 1$ et $f/_{\overline{F}} = 0$, c'est à dire $x \notin \ker(f)$ et $\overline{F} \subset \ker(f) \Longrightarrow F \subset \ker(f)$. Ce qui donne $x \notin G$. Absurde. Ainsi, $G \subset \overline{F}$ et donc $\overline{F} = G = \bigcap_{\substack{f\in E^* \\ F\subset \ker(f)}} \ker(f)$.

De plus $\overline{F} = E \Longleftrightarrow E = \bigcap_{\substack{f\in E^* \\ F\subset \ker(f)}} \ker(f) \Longleftrightarrow \forall f \in E^*, F \subset \ker(f), \Rightarrow \ker(f) = E$

$\Longleftrightarrow \forall f \in E^*,\ f|_F = 0 \Longrightarrow f \equiv 0.$ ■

Rappel :

Soit E un espace vectoriel. On dit que H est un hyperplan dans E s'il admet une droite vectorielle comme supplémentaire, c'est à dire, il existe $a \in E\backslash H$ tel que $E = H \oplus \langle a\rangle$.

Fin de Rappel

Remarque 3.0.14. *1. H est un hyperplan SSi il existe une forme linéaire non nulle f sur E telle que $H = \ker(f)$.*

2. L'hyperplan $H = \ker(f)$, $f' \in E'$ est fermé SSi f est continue ($f \in E^*$).

Définition 3.0.15. *Soit A et B deux parties d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$. On dit que l'hyperplan H d'équation $f(x) = 0$ sépare A et B si $f(x) \leq \alpha$, $\forall x \in A$ et $f(x) \geq \alpha$, $\forall x \in B$ pour un certain réel α.*

Théorème 3.0.16. *(Hahn-Banach. Version géométrique)*
Soient A et B deux partie convexes non vides et disjointes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E. On suppose que A est un ouvert de E. Alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B. (c'est à dire il existe $f \in E^*$ tel que $f_{|A} \geq \alpha$ et $f_{|B} \leq \alpha$).

adel saddi

Chapitre IV

Grands théorèmes de l'analyse fonctionnelle

Théorème 4.0.17. *(Théorème de Baire)*
Soit (E, d) un espac métrique complet. Si $(U_n)_n$ est une suite d'ouverts et denses dans E, alors leur intersection $\bigcap_n U_n$ est aussi dense dans E
ou de manière équivalente :
Si $(F_n)_n$ est une suite de fermés et d'intérieurs vides, alors leur réunion $\bigcup_n F_n$ est aussi d'intérieur vide.

Preuve. Si $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite d'ouverts et denses dans E et posons $V = \bigcap_{n\geq 1} U_n$.
Pour montrer que V est dense dans E, il suffit de montrer que, tout ouvert non vide de E rencontre V.
Soit U un ouvert non vide de E. Comme U_1 est dense dans E, il existe $x_1 \in E$ et $0 < r_1 < 1$ tels que $\overline{B}(x_1, r_1) \subset U_1 \bigcap U$.
U_2 est aussi dense, il existe de même $x_2 \in E$ et $0 < r_2 < \frac{1}{2}$ tels que $\overline{B}(x_2, r_2) \subset B(x_1, r_1) \cap U_2$.
Par récurrence sur n on construit une suite $(x_n)_n \subset E$ et une suite $(r_n)_n \subset \mathbb{R}$ avec $0 < r_n < \frac{1}{2^{n-1}}$ telle que $\overline{B}(x_n, r_n) \subset U_n \bigcap B(x_{n-1}, r_{n-1})$. En particulier, pour tout n, on a $d(x_{n+1}, x_n) < \frac{1}{2^{n-1}}$.
D'où la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy dans E qui est complet donc $(x_n)_n$ est convergente.
Soit $x = \lim_n x_n$, comme $\overline{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset \overline{B}(x_n, r_n)$ pour tout n, alors $x = \lim_n x_n \in \bigcap_{n\geq 1} \overline{B}(x_n, r_n)$.
Donc $x \in \overline{B}(x_1, r_1) \subset U_1 \bigcap U \subset U$ et on a aussi $x \in \bigcap_n \overline{B}(x_n, r_n) \subset \bigcap_{n\geq 1} U_n = V$.

adel saddi

Ainsi $x \in U \bigcap V$. D'où la preuve. ■

Exemples 4.0.18. *1. Sur $\mathbb{R}$, $F_p = \{p\}$, $p \in \mathbb{N}$ $\forall p$, F_p est un fermé d'intérieur vide. D'après le théorème de Baire. $\mathbb{N} = \bigcup_{p\in\mathbb{N}}$, F_p est d'intérieur vide.*

2. Sur Q, $F_p = \{p\}$, $p \in \mathbb{N}$. $F_p^c = Q\backslash\{p\}$ est dense dans Q.

$$\begin{aligned}\bigcap_{p\in Q} F_p^c &= \bigcap_{p\in Q} Q\backslash\{p\} \\ &= \bigcap_{p\in Q} Q \cap \{p\}^c = Q \cap (\bigcap_{p\in Q} \{p\}^c) = \emptyset.\end{aligned}$$

Donc $\bigcap_{p\in Q} F_p^c$ n'est pas dense ce qui prouve que $(Q, |\,|)$ n'est pas complet.

Théorème 4.0.19. *(Théorème de Banach-Steinhaus)*
Soit E un espace d Banach et F un espace vectoriel normé (non nécessairement complet) et $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'applications linéaires continues de E dans F. Alors on a l'alternative suivante :
Soit $\sup_{i\in I} \|T_i\| < +\infty$, ou bien, il existe une suite d'ouverts $(U_n)_n$ telle que pour tout n, U_n est dense dans E et pour tout $x \in \bigcap_{n\geq 1} U_n$, on a $\sup_{i\in I} \|T_i(x)\| = +\infty$.

Remarque 4.0.20. *D'après le théorème de Baire $\bigcap_{n\geq 1} U_n$ est dense dans E.*

Preuve. Soit $x \in E$, on pose $\varphi(x) = \sup_{i\in I} \|T_i(x)\|$, $U_n = \{x \in E/\varphi(x) > n\}, n \geq 1$ et pour tout $i \in I$, soit $V_i^n = \{x \in E/||T_i x|| > n\}$. On a $U_n = \cup_{i\in I} V_i^n$
φ est une application de E dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ et pour tous $i \in I$ et $n \geq 1$, V_i^n donc U_n est un ensemble ouvert de E.
<u>1er*cas*</u> :
Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que U_{n_0} n'est pas dense dans E. Il existe alors $x_0 \in E$, $r > 0$, tel que $B(x_0, r) \bigcap U_{n_0} = \emptyset$.
Ce qui donne, $\forall\, x \in E$, $\|x\| < r$, $x_0 + x \notin U_{n_0}$. $(B(x_0, r) = x_0 + B(0, r))$.

adel saddi

$\Longrightarrow \forall\, x \in E,\ \|x\| < r \Longrightarrow \varphi(x_0, x) \leq n_0$. On a alors $\forall\, x \in E,\ \|x\| < r,\ \forall\, i \in I$

$$\begin{aligned} \|T_i(x)\| &= \|T_i(x + x_0) - T_i(x_0)\| \\ &\leq \|T_i(x_0 + x)\| + \|T_i(x_0)\| \\ &\leq 2n_0. \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \forall\, i \in I,\ \forall\, x \in E,\ \|x\| \leq 1.$

$$\begin{aligned} \|T_i(x)\| &= \left\|\frac{2}{r} T_i(\frac{r}{2}x)\right\| \\ &= \frac{2}{r}\|T_i(\frac{r}{2}x)\| \\ &\leq \frac{4n_0}{r} = M. \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \sup\limits_{i \in I} \|T_i\| \leq M.$

$\underline{2^{me} cas}$:

$\forall\, n \geq 1$, U_n est dense dans E. D'après le théorème de Baire. $\bigcap\limits_n U_n$ est aussi dense dans E. De plus $\forall\, x \in \bigcap\limits_{n \geq 1} U_n$, on a $\varphi(x) = +\infty \Longleftrightarrow \sup\limits_{i \in I} \|T_i(x)\| = +\infty$. ■

Corollaire 4.0.21. *Sous les hypothèses de théorème de Banach-Steinhaus si pour tout $x \in E$, $\sup\limits_{i \in I} \|T_i(x)\| < \infty$, alors $\sup\limits_{i \in I} \|T_i\| < \infty$.*

Application

• Si $(T_n)_n$ est une suite d'applications linéaires continues de E dans F telle $(T_n x)_n$ converge pour tout $x \in E$. Alors, il existe $T \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $(T_n)_n$ converge simplement vers T dans $\mathcal{L}(E, F)$ et $\|T\| \leq \sup\limits_n \|T_n\|$.

En effet :

$\forall\, x \in E$, $(T_n x)_n$ converge dans F.

Soit $y_x = \lim\limits_n T_n x$ et on pose

adel saddi

$$\begin{array}{rcl} T : E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & Tx = y_x = \lim\limits_n T_n x. \end{array}$$

• T est une application bien définie de E dans F.

• T est linéaire, $\forall\, x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\begin{array}{rcl} T(\lambda x + x') & = & y_{\lambda x + x'} \\ & = & \lim\limits_n T_n(\lambda x + x') \\ & = & \lim\limits_n (\lambda T_n x + T_n x') \\ & = & \lambda \lim\limits_n T_n x + \lim\limits_n T_n x' \\ & = & \lambda T x + T x'. \end{array}$$

On a $\forall\, x \in E$, $\lim\limits_n \|T_n x - y_x\| = 0 \iff \lim\limits_n \|T_n x - Tx\| = 0$.
D'où $(T_n)_n$ converge faiblement vers T. De plus on a : $\sup\limits_n \|T_n\| = M < \infty$,
d'où $\forall\, \epsilon > 0$, $\forall\, x \in E$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\quad |-\|T_n x\| + \|Tx\|| < \epsilon \Longrightarrow \|Tx\| < \epsilon + \|T_n x\|$.

$$\begin{array}{rcl} \forall\, x \in E,\ \|Tx\| & \leq & \sup\limits_n (\|T_n\| \|x\|) + \epsilon \\ & \leq & M\|x\| + \epsilon. \end{array}$$

D'où $\forall\, x \in E$, $\|Tx\| \leq M\|x\|$.
Donc $T \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\|T\| \leq M = \sup\limits_n \|T_n\|$.
Ainsi $(T_n)_n$ converge simplement vers T dans $\mathcal{L}(E, F)$.

Définition 4.0.22. *Soient (X, τ) et (Y, τ') deux espaces topologiques et $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ une application. f est dite ouverte si l'image par f de tout ouvert de X est un ouvert de Y.*

Théorème 4.0.23. *(Théorème de l'application ouverte)*
Soient E et F deux espaces de Banach et T une application linéaire continue de E dans F. Si T est surjective, alors T est ouverte.

adel saddi

Preuve. Soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$ surjective. Montrons que T est ouverte. Pour ceci, il suffit de montrer $\forall\, x \in E$, $\forall\, \alpha > 0$, il existe $r > 0$ tel que $B_F(Tx, r) \subset T(B_E(x, \alpha))$?

$$\begin{aligned}
&\iff Tx + B_F(0,r) \subset T(x + B_F(0,\alpha)) \\
&\iff Tx + B_F(0,r) \subset Tx + T(B_E(0,\alpha)) \\
&\iff B_F(0,r) \subset \alpha T(B_E(0,1)) \\
&\iff B_F(0,\frac{r}{\alpha}) \subset T(B_E(0,1)).
\end{aligned}$$

Ainsi T est ouvert $\iff$ il existe $r > 0$ tel que

$$B_F(0,r) \subset T(B_E(0,1)). \tag{4.0.1}$$

Pour tout $n \geq 1$, posons $F_n = n\overline{T(B(0,1))}$. On a, $\forall\, n$, F_n est un fermé non vide, comme T est surjective, on a de plus $F = \bigcup_n F_n$. D'après le théorème de Baire, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\overset{\circ}{F}_{n_0} \neq \emptyset$. D'où il existe $y_0 \in F$ et $r > 0$ telle que

$$B(y_0, 4r) \subset F_{n_0} = T(B(0,1)). \tag{4.0.2}$$

Soit $y \in F$, $\|y\| < 2r$, on a $2y = \underbrace{2y + y_0}_{\in B(y_0,4r) \subset \overline{T(B(0,1))}} - \underbrace{y_0}_{\in \overline{T(B(0,1))}}$.
Alors $y \in \overline{T(B(0,1))}$. Ainsi, il existe $r > 0$ tel que

$$B(0, 2r) \subset \overline{T(B(0,1))}. \tag{4.0.3}$$

Pour demontre 4.0.1, on va proceder par une approximation succéssive pour resoudre l'équation $Tx = y$ dans $B(0,1)$ pour tout $y \in B(0,r)$.
Soit $y \in B(0,r)$, d'aprés 4.0.3 il existe $x_1 \in E$ telle que $\|x_1\| < \frac{1}{2}$ et $\|y - Tx_1\| < \frac{r}{2}$. En effet $2y \in B(0,2r)$ d'où $2y \in \overline{T(B(0,1))} \Longrightarrow B(2y,r) \cap T(B(0,1)) \neq \emptyset$.
Il existe $x_1 \in B(0, \frac{1}{2})$ tel que $2Tx_1 \in B(2y,r)$.
En remplaçant y par $y - Tx_1$, on assure l'existence de $x_2 \in E$ tel que $\|x_2\| < \frac{1}{4}$ tel que $(\|(y - Tx_1) - Tx_2\| < \frac{r}{4}4 = r)$ $\|y - Tx_1 - Tx_2\| < \frac{r}{4}$.
Par récurrence on construit une suite $(x_n)_n$ de E, telle que $\|x_n\| \leq \frac{1}{2^n}$ et $\|y - (Tx_1 + T_2 + \ldots + Tx_n)\|$.

adel saddi

On pose $x = \sum_n x_n$. La série $\sum_n x_n$ est absolument convergente dans l'espace de Banach E. Donc elle est convergente dans E. Soit alors $x = \sum_{n\geq 1} x_n$, on a

$$\begin{aligned} \|x\| &\leq \sum_{n\geq 1} \|x_n\| \\ &< \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} = 1. \end{aligned}$$

De plus $\|y - T(\sum_{k=1}^{n} x_k)\| < \frac{r}{2^n}$. D'où par passage à la limite $\|y - Tx\| = 0 \Longleftrightarrow y = Tx$.
Ainsi $\forall\, y \in B(0,r)$, il existe $x \in B(0,1)$ telle que $y = Tx \in T(B(0,1))$.
D'où 4.0.1 et T est une application ouverte. ■

Corollaire 4.0.24. *Toute application linéaire continue et bijective entre espaces de Banach est bicontinue (T et T^{-1} continue).*

Preuve. $T : E \longrightarrow F$ bijective et continue alors $T^{-1} : F \longrightarrow E$ et $\forall\, O$ ouvert de E, $(T^{-1})^{-1}(O) = T(O)$ est un ouvert de F. D'où T^{-1} est continue. ■

Corollaire 4.0.25. *Soit E un espace vectoriel $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ deux normes sur E. On suppose que $(E, \|.\|_i)$, $i = 1, 2$ est espace de Banach et qu'il existe $c > 0$ telle que $\forall\, x \in E$, $\|x\|_1 \leq c\|x\|_2$. Alors, les deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont équivalentes.*

Preuve. Soit l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{I} : (E, \|.\|_2) &\longrightarrow (E, \|.\|_1) \\ x &\longmapsto \mathbb{I}x = x. \end{aligned}$$

$\mathbb{I}$ est une application linéaire de $(E, \|.\|_2)$ dans $(E, \|.\|_1)$ vérifiant :
$\forall\, x \in E$, $\|\mathbb{I}x\|_1 = \|x\|_1 \leq c\|x\|_2$. Donc $\mathbb{I}$ est linéaire et continue entre deux espaces de Banach. De plus $\mathbb{I}$ est bijective. Donc $\mathbb{I}$ est bicontinue, en particulier $\mathbb{I}^{-1}$ est linéaire continue de $(E, \|.\|_1)$ dans $(E, \|.\|_2)$.

adel saddi

D'où, il existe $c' > 0$ tel que $\forall\, x \in E$

$$\begin{aligned} \|x\|_2 &= \|\mathbb{I}x\|_2 \\ &= \|\mathbb{I}^{-1}x\|_2 \\ &\leq c'\|x\|_1. \end{aligned}$$

Donc, il existe $c > 0$, $c' > 0$ tel que $\forall\, x \in E$

$$\frac{1}{c'}\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq c\|x\|_2.$$

■

Rappel :(Théorème du graphe fermé)

Soit X et Y deux espaces métriques et f une application de X dans Y. Si f est continue, alors son graphe

$$G(f) = \{(x, f(x)),\, x \in X\} \text{ est un fermé de } X \times Y.$$

Fin de Rappel

Dans le cas des applications linéaires, on a le résultat suivant :

Théorème 4.0.26. *(Théorème du graphe fermé)*
Soient E et F deux espaces de Banach et T une application linéaire de E dans F. Alors, T est continue si et seulement si le graphe $G(T)$ de T est fermé dans $E \times F$.

Preuve. " $\Longrightarrow$ " déja connue.
" $\Longleftarrow$ " Supposons que le graphe $G(T) = \{(x, Tx),\, x \in E\}$ est un fermé de $E \times F$. Montrer que T est continue ?
Posons $\|x\|_1 = \|x\|_E$ et $\|x\|_2 = \|x\|_E + \|Tx\|_F\ \forall\, x \in E$.
$\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont deux normes sur E vérifiant $\forall\, x \in E\ \|x\|_1 \leq \|x\|_2 = \|x\|_E + \|Tx\|_F$.
Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy de $(E, \|.\|_2)$. Alors, $\forall\, \epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, p, q \in \mathbb{N}$ $p \geq N$, $q \geq N \Longrightarrow \|x_p - x_q\|_2 < \epsilon$.
$\Longleftrightarrow \forall\, \epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, p, q \in \mathbb{N}, p \geq \mathbb{N},\, q \geq \mathbb{N} \Longrightarrow \|x_p - x_q\|_E + \|Tx_p - Tx_q\|_F < \epsilon.$$

adel saddi

D'où $(x_n)_n$ est de cauchy dans $(E, \|.\|)$ et $(Tx_n)_n$ est de Cauchy dans F. Comme E et F sont des Banach, alors les deux suites $(x_n)_n$ et $(Tx_n)_n$ converge respectivement dans E et F.
Soit $x = \lim_n x_n$ et $y = \lim_n Tx_n$. Alors $(x_n, Tx_n)_n$ est une suite convergente du graphe T qui est fermé, donc $(x, y) = \lim_n (x_n, Tx_n) \in G(T)$. D'où $y = Tx$ et

$$\begin{aligned} \|x_n - x\|_2 &= \|x_n - x\|_E + \|T(x_n - x)\|_F \\ &= \|x_n - x\|_E + \|Tx_n - Tx\|_F \\ &= \|x_n - x\|_E + \|Tx_n - y\|_F \\ &\underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad . \end{aligned}$$

Donc $(x_n)_n$ converge vers x dans $(E, \|.\|_2)$ en suite $(E, \|.\|_2)$ est un espace de Banach. D'aprés le corollaire 4.0.25, $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont équivalentes. Enfin, il existe $c > 0$, telle que $\forall\, x \in E$,

$$\|Tx\|_F \leq \|x\|_E + \|Tx\|_F = \|x\|_2 \leq c\|x\|_1 \leq \|x\|_E.$$

D'où T est continue. ■

adel saddi

Chapitre V

Espaces de Hilbert

5.1 Espace préhilbertien

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Définition 5.1.1. *Une application $(.,.)$ de $E \times E$ dans $\mathbb{K}$ est dite un produit scalaire sur E si :*

1. $\forall\, u, v, w \in E$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}$,
   $(\lambda u + v, w) = \lambda(u, w) + (v, w)$ *(linéarité par rapport à la 1er variable).*
2. $\forall\, u, v \in E$, $(u, v) = \overline{(v, u)}$ *(hermitivité).*
3. $\forall\, u \in E\backslash\{0\}$, $(u, u) > 0$. *(positivité),*

Remarque 5.1.2. *Si $(.,.)$ est un produit scalaire sur E alors pour tout $u, v, w \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a*

$$\begin{aligned}
(w, \lambda u + v) &= \overline{(\lambda u + v, w)} \\
&= \overline{\lambda(u, w) + (v, w)} \\
&= \overline{\lambda}\overline{(u, w)} + \overline{(v, w)} \\
&= \overline{\lambda}(w, u) + (w, v).
\end{aligned}$$

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est dit espace préhilbertien.

Exemples 5.1.3.

1. *Sur $\mathbb{K}^n$, $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$ définit un produit scalaire.*
2. *Sur $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{K})$, $(f, g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$ est un produit scalaire.*
3. *Sur $l^2(\mathbb{K}) = \{x = (x_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{K} / \sum_{n\geq 0} |x_n|^2 < \infty\}$.*
   L'application $(x, y) = \sum_{n\geq 0} x_n \overline{y_n}$ définit un produit scalaire.

adel saddi

Proposition 5.1.4. *(Inégalité de Cauchy-Schwarz)*
Soit E un espace préhilbertien sur $\mathbb{K}$. Alors, pour tout $u, v \in E$, $|(u,v)| \leq \sqrt{(u,u)}\sqrt{(v,v)}$.

Preuve. Si u et v sont colinéaires alors, d'après la linéarité du produit scalaire l'inégalité est realisée et elle est une vraie égalité. Si u et v ne sont pas colinéaires, on pose $w = u - \frac{(u,v)}{(v,v)}v$. D'après la positivité du produit scalaire appliquée à w, on obtient

$$\begin{aligned}
& (w,w) \geq 0 \\
\Longleftrightarrow\ & \Big(u - \frac{(u,v)}{(v,v)}v, u - \frac{(u,v)}{(v,v)}v\Big) \geq 0 \\
\Longleftrightarrow\ & (u,u) - (u, \frac{(u,v)}{(v,v)}v) - (\frac{(u,v)}{(v,v)}v, u) + (\frac{(u,v)}{(v,v)}v, \frac{(u,v)}{(v,v)}v) \geq 0 \\
\Longleftrightarrow\ & (u,u) - \frac{\overline{(u,v)}}{(v,v)}(u,v) - \frac{(u,v)}{(v,v)}(v,u) + \frac{|(u,v)|^2}{(v,v)^2}(v,v) \geq 0. \\
\Longleftrightarrow\ & (u,u) - \frac{|(u,v)|^2}{(v,v)} \geq 0 \\
\Longleftrightarrow\ & |(u,v)|^2 \leq (u,u)(v,v) \\
\Longleftrightarrow\ & |(u,v)| \leq \sqrt{(u,u)}\sqrt{(v,v)}.
\end{aligned}$$

■

Proposition 5.1.5. *Soit E un espace préhilbertien. Alors l'application $N : u \longrightarrow (u,u)^{\frac{1}{2}}$ définie une norme sur E.*

Preuve. N est positive et $N(u)^2 = (u,u) = 0 \Longrightarrow u = 0$, d'après la positivité du produit scalaire. De plus pour tout $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned}
N(\lambda u) = (\lambda u, \lambda u)^{\frac{1}{2}} &= [\lambda\overline{\lambda}(u,u)]^{\frac{1}{2}} \\
&= [|\lambda|^2(u,u)]^{\frac{1}{2}} \\
&= |\lambda|(u,u)^{\frac{1}{2}} = |\lambda|N(u).
\end{aligned}$$

adelsaddi

Soient $u, v \in E$ on a

$$\begin{aligned} N(u+v)^2 = (u+v, u+v) &= (u,u) + (u,v) + (v,u) + (v,v) \\ &= (u,u) + 2R(u,v) + (v,v) \\ &\leq (u,u) + 2(u,u)^{\frac{1}{2}}.(v,v)^{\frac{1}{2}} + (v,v) \\ &\leq \Big((u,u)^{\frac{1}{2}} + (v,v)^{\frac{1}{2}}\Big)^2. \end{aligned}$$

Ainsi $N(u+v) \leq N(u) + N(v)$.

On pose dans la suite $\|u\| = (u,u)^{\frac{1}{2}}$.

On a alors $\forall\, u, v \in E,\ |(u,v)| \leq \|u\|\|v\|$. ■

Remarque 5.1.6. *1. L'inégalité de Cauchy-Schwarz est une égalité si et seulement si les deux vecteurs sont colinéaires (en particulier si l'un des vecteurs est le vecteur nul car le vecteur nul est colinéaire avec tous).*

2. La norme définie dans la proposition 5.1.5 est dite norme associée au produit scalaire.

Proposition 5.1.7. *Soit E un espace préhilbertien et $\|.\|$ la norme associée au produit scalaire. Alors :*

1. *L'identité du parallélogramme*

$$\forall u, v \in E,\ \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

2. *Identité de polarisation : Pour tous $u, v \in E$, on a*
   (a) $(u,v) = \frac{1}{4}\Big(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\Big)$, *si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
   (b) $(u,v) = \frac{1}{4}\Big(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + i\|u+iv\|^2 - i\|u-iv\|^2\Big)$, *si* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Preuve.

$$\|u+v\|^2 = (u,u) + (u,v) + (v,u) + (v,v) \tag{5.1.1}$$

$$\|u-v\|^2 = (u,u) - (u,v) - (v,u) + (v,v) \tag{5.1.2}$$

1. La somme donne le résultat.

adel saddi

2. (a) La différence donne le résultat dans le cas ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

   (b) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

$$i\|u+iv\|^2 = i(u,u) + (u,v) - (v,u) - i(v,v) \tag{5.1.3}$$

$$i\|u-iv\|^2 = i(u,u) - (u,v) + (v,u) - i(v,v) \tag{5.1.4}$$

(5.1.1)- (5.1.2) + (5.1.3) - (5.1.4) $\Longrightarrow \|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + i\|u+iv\|^2 - i\|u-iv\|^2 = 4(u,v)$.

■

Remarque 5.1.8. *Le produit scalaire sur E est une application continue sur $E \times E$. Dans la suite, on utilise la notation $\langle .,. \rangle$ pour un produit scalaire et $\mathbb{H}$ pour un espace préhilbertien.*

Définition 5.1.9. *Soit $\mathbb{H}$ un espace préhilbertien et A une partie de $\mathbb{H}$. On appelle orthogonal de A l'ensemble noté $A^\perp$ et définie par*

$$A^\perp = \{x \in \mathbb{H} \,/\, \langle x, y \rangle = 0, \forall\, y \in A\}.$$

Par suite, pour tout $x \in \mathbb{H}$, $x^\perp = \{x\}^\perp$.
On dit que x et y sont deux vecteurs orthogonaux si

$$x \in y^\perp \Longleftrightarrow y \in x^\perp \Longleftrightarrow \langle x, y \rangle = 0.$$

On note $x \perp y$.

Remarque 5.1.10. *1. $\{0\}^\perp = \mathbb{H}$, $\mathbb{H}^\perp = \{0\}$.*

2. $A \subset B \Longrightarrow B^\perp \subset A^\perp$.

Proposition 5.1.11. *Soient $\mathbb{H}$ un espace préhilbertien et A une partie de $\mathbb{H}$. Alors $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathbb{H}$.*

Preuve. Soit $A \subset \mathbb{H}$, $0 \in A^\perp$, donc $A^\perp \neq \emptyset$ si $x, y \in A^\perp$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors pour tout $z \in A$, on a

$$\begin{aligned} \langle \lambda x + y, z \rangle &= \lambda \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \\ &= \lambda 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

adel saddi

$\Longrightarrow \lambda x + y \in A^{\perp}$. D'où $A^{\perp}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{H}$. De plus si $(x_n)_n \subset A^{\perp}$ une suite convergente vers x.

$\forall\, z \in A$, on a

$$\begin{aligned} \langle x, z\rangle &= \langle \lim_n x_n, z\rangle \\ &= \lim_n \langle x_n, z\rangle \\ &= \lim_n 0 = 0. \end{aligned}$$

D'où $x \in A^{\perp}$ et $A^{\perp}$ est fermé. ■

Remarque 5.1.12. *Dans un espace préhilbertien $\mathbb{H}$ on a :*

1. $\forall\, A \subset \mathbb{H}$, $A \subset (A^{\perp})^{\perp}$.
2. $A^{\perp} = \overline{A}^{\perp} = vect(A)^{\perp} = \overline{vect(A)}^{\perp}$.
3. *Si A est un espace vectoriel, alors* $(A^{\perp})^{\perp} = \overline{A}$.

Définition 5.1.13. *Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille d'un espace préhilbertien $\mathbb{H}$. La famille $(e_i)_{i\in I}$ est dite orthonormée si*

$$\begin{cases} \langle e_i, e_j\rangle = 0 \quad ,\forall\, i \neq j \in I. \\ \langle e_i, e_i\rangle = 1, \quad \forall\, i \in I. \end{cases}$$

Proposition 5.1.14. *(Egalité de Pythagore et Inégalité de Bessel)*

Soit $\mathbb{H}$ un espace préhilbertien et $(e_i)_{n\geq 0}$ est une famille orthonormée de $\mathbb{H}$. Alors

1. $\forall\, u \in \mathbb{H}$, $\forall\, n \geq 0$, $\|u\|^2 = \sum_{k=0}^{n} |(u, e_k)|^2 + \left\| u - \sum_{k=0}^{n} (u, e_k) e_k \right\|^2$ *(Egalité de Pythagore).*
2. $\forall\, u \in \mathbb{H}$, $\sum_{n\geq 0} |(u, e_n)|^2 \leq \|u\|^2$ *(Inégalité de Bessel).*

Preuve.

adel saddi

1. $\forall\, u \in \mathbb{H}$

$$\begin{aligned}
\left\|u - \sum_{k=0}^{n}(u,e_k)e_k\right\|^2 &= \langle u - \sum_{k=0}^{n}(u,e_k)e_k, u - \sum_{k=0}^{n}(u,e_k)e_k\rangle \\
&= \langle u,u\rangle - \sum_{k=0}^{n}\langle u,e_k\rangle\langle e_k,u\rangle - \sum_{k=0}^{n}\overline{\langle u,e_k\rangle}\langle u,e_k\rangle \\
&+ \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n}\langle u,e_k\rangle\overline{\langle u,e_l\rangle}.\langle e_k,e_l\rangle \\
&= \|u\|^2 - 2\sum_{k=0}^{n}|\langle u,e_k\rangle|^2 + \sum_{k=0}^{n}|\langle u,e_k\rangle|^2 \\
&= \|u\|^2 - \sum_{k=0}^{n}|\langle u,e_k\rangle|^2.
\end{aligned}$$

2. D'après l'égalité de Pythagore, $\sum_{k=0}^{n}|\langle u,e_k\rangle|^2 \leq \|u\|^2$, pour tout $n \geq 0$. Donc la série $\sum_{n}|\langle u,e_n\rangle|^2$ est convergente et on a $\sum_{n\geq 0}|\langle u,e_n\rangle|^2 \leq \|u\|^2$.

■

5.2 Espaces de Hilbert

Définition 5.2.1. *Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet pour la norme associée.*

Exemple 5.2.2.

1. *$l^2(\mathbb{K})$ muni du produit scalaire $\langle x,y\rangle = \sum_{n\geq 0} x_n\overline{y_n}$ est un espace de Hilbert.*
2. *$L^2([0,1],d\lambda)$ muni du produit scalaire $\int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx$ est un espace de Hilbert.*
3. *$\mathcal{C}([0,1],\mathbb{K})$ muni du produit scalaire $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx$ n'est pas un espace de Hilbert (n'est pas complet).*

Lemme 5.2.3. *(Lemme de Riesz-Fister)*
Soit $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert et $(e_n)_n$ une suite orthonormée de $\mathbb{H}$. Alors la série $\sum_n \alpha_n e_n$ convergente dans $\mathbb{H}$ si et seulement si la suite $(\alpha_n)_n$ appartient à $l^2(\mathbb{K})$ c'est à dire $\sum_n |\alpha_n|^2 < \infty$.

adel saddi

Preuve. D'après la complétude de $\mathbb{H}$ la série $\sum_n \alpha_n e_n$ converge $\Longleftrightarrow$ elle est dans Cauchy. Ainsi $\forall\, p > q \geq 0$, on a

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{k=0}^{p}\alpha_k e_k - \sum_{k=0}^{q}\alpha_k e_k\Big\|^2 &= \langle \sum_{k=q+1}^{p}\alpha_k e_k, \sum_{l=q+1}^{p}\alpha_l e_l\rangle \\ &= \sum_{\substack{q+1\leq k\\ l\leq p}}\alpha_k\overline{\alpha_l}\langle e_k, e_l\rangle \\ &= \sum_{k=q+1}^{p}|\alpha_k|^2.\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{R}$ est aussi complet alors $\sum_n \alpha_n e_n$ est convergente si et seulement si $\sum_n \alpha_n e_n$ est de Cauchy si et seulement si $\sum_n |\alpha_n|^2$ est convergente.

• Etant donnée une suite orthonormée $(e_n)_n$ d'un espace de Hilbert $\mathbb{H}$. On note ϕ : l'application à tout $u \in \mathbb{H}$, on associée la suite $(\langle u, e_n\rangle)_{n\geq 0}$. D'aprés l'inégalité de Bessel la suite $(\langle u, e_n\rangle)_{n\geq 0}$ dans $l^2(\mathbb{N})$ si $u = \sum_n \alpha_n e_n \in \mathbb{H}$, alors $\phi(u) = (\alpha_n)_{n\geq 0}$ (c'est à dire $\alpha_n = \langle u, e_n\rangle$, $\forall\, n \geq 0$). ■

Dans la suite $\mathbb{H}$ désigne un espace de Hilbert.

Définition 5.2.4. *Soit $(e_n)_{n\in I}$ une famille orthonormé de $\mathbb{H}$. On dit que $(e_i)_{i\in I}$ est une base Hilbertienne si elle est totale c'est à dire :*
$\forall\, u \in \mathbb{H}$, $\langle u, e_i\rangle = 0, \forall\, i \in I \Longrightarrow u = 0$.

Remarque 5.2.5.

1. *La famille $(e_i)_{i\in I}$ est totale si $\{e_i,\, i \in I\}^{\perp} = \{0\}$.*
2. *$(e_i)_{i\in I}$ est totale $\Longleftrightarrow \overline{vect(e_i,\, i \in I)} = \mathbb{H}$.*
3. *Une famille orthonormée est une base hilbertienne si et seulement si ϕ est injective.*

Théorème 5.2.6. *Soit $(e_n)_n$ une suite orthonormée d'un espace de Hilbert H alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *$(e_n)_n$ est une base hilbertienne (ou totale).*
2. *$\forall\, u \in \mathbb{H}$ alors $u = \sum_{n\geq 0}\langle u, e_n\rangle e_n$.*
3. *$\|u\|^2 = \sum_{n\geq 0}|\langle u, e_n\rangle|^2$, $\forall u \in H$ (Egalité de Parseval).*

adel saddi

Preuve. 1) $\Longrightarrow$ 2)

Supposons $(e_n)_n$ est une base hilbertienne alors $\forall\, u \in \mathbb{H}$, $\forall\, j \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\langle u - \sum_{n\geq 0}\langle u, e_n\rangle e_n, e_j\rangle &= \langle u, e_j\rangle - \sum_{n\geq 0}\langle u, e_n\rangle\langle e_n, e_j\rangle \\ &= \langle u, e_j\rangle - \langle u, e_j\rangle = 0.\end{aligned}$$

D'où $u - \sum_{n\geq 0}\langle u, e_n\rangle e_n = 0 \Longleftrightarrow u = \sum_{n\geq 0}\langle u, e_n\rangle e_n$.

2) $\Longrightarrow$ 3)

D'aprés l'égalité de Pythagore on a $\forall\, u \in \mathbb{H}$, $\forall k \in \mathbb{N}$

$\|u\|^2 = \sum_{n=0}^{k} |\langle u, e_n\rangle|^2 + \left\|u - \sum_{n=0}^{k}(u, e_n)e_n\right\|^2$.

Par passage à la limite quand k tend vers 0, on obtient

$$\|u\|^2 = \sum_{n=0}^{k} |\langle u, e_n\rangle|^2 + \lim_{n\longrightarrow+\infty}\left\|u - \sum_{n=0}^{\infty}\langle u, e_n\rangle e_n\right\|^2$$

D'aprés la continuité de la norme, on aura

$$\|u\|^2 = \sum_{n\geq 0} |\langle u, e_n\rangle|^2.$$

3) $\Longrightarrow$ 1) Si $\forall u \in \mathbb{H}$, $\|u\|^2 = \sum_{n\geq 0} |\langle u, e_n\rangle|^2$, alors si pour tout $n \geq 0$, $\langle u, e_n\rangle = 0$ alors $\|u\| = 0 \Longleftrightarrow u = 0$..

Donc $(e_n)_n$ est totale ou encore une base hilbertienne. ■

Théorème 5.2.7. *Tout espace de Hilbert admet une base hilbertienne. De plus tout espace de Hilbert séparable admet une base Hilbertienne dénombrable.*

Preuve. Soit $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert non réduit à $\{0\}$. Soit L une famille orthonormé de $\mathbb{H}$(une telle famille peut être construite au moyen du processus d'orthonormalisation de Gaus-Schmidt). Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des familles orthonormés de $\mathbb{H}$ contenant L. On munit β par la relation d'ordre "inclusion".

Montrer que $(\mathcal{B}, \subset)$ est inductif. Soit $\mathcal{P} = \{P_i,\, i \in I\}$ une partie totalement ordonnée de β et posons $P = \bigcup_{i\in I} P_i$. Il suffit de vérifier que $\mathcal{P}$ est aussi une famille orthonormée de $\mathbb{H}$. Soient alors

adel saddi

$x, y \in \mathcal{P}$, $x \neq y$, il existe $i, j \in I$ telle que $x \in \mathcal{P}_i$, $y \in \mathcal{P}_j$ d'où , $\|x\| = \|y\| = 1$ puisque $\mathcal{P}_i$ et $\mathcal{P}_j$ sont des familles orthonormées. De plus, $\mathcal{P}$ est totalement ordonnée alors il existe $k \in \{i, j\}$ tels que $x, y \in \mathcal{P}_k$. Comme $\mathcal{P}_k$ est orthonormée donc $\langle x, y\rangle = 0$. Ainsi $\mathcal{P}$ est une famille ordonnée inductive. D'après le lemme de Zorn $\mathcal{B}$ admet un élément maximal B. Reste à montrer que B est totale. Supposons le contraire, alors :
$\overline{vect(B)} \neq \mathbb{H}$, d'où il existe $x_0 \in \mathbb{H}$, $\|x_0\| = 1$ et $x_0 \in \overline{vect(B)}^{\perp}$.
Soit $B' = B \bigcup \{x_0\} \supset L$, alors $B' \in \mathcal{B}$ et contient strictement un élément maximal. D'où B est totale, par suite B est une base hilbertienne.

■

5.3 Projection sur un convexe fermé

Théorème 5.3.1. *Soit $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert et C une partie convexe fermé de $\mathbb{H}$. Alors pour tout $u \in \mathbb{H}$ il existe un unique élément $Pu \in C$ tel que*

$$\begin{cases} \|u - Pu\| = d(u, C) \\ \mathfrak{Re}\langle u - Pu, v - Pu\rangle \leq 0, \forall\, v \in C. \end{cases}$$

Remarque 5.3.2. *L'unique vecteur $Pu \in \mathbb{C}$ realise le munimum de l'application :*

$$\begin{aligned} \mathcal{C} : C &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \mathcal{C}(v) = \|v - u\| \end{aligned}$$

et $\inf\limits_{v \in C} \mathcal{C}(v) = \inf\limits_{v \in C} \|v - u\| = d(u, C)$. *De plus Pu est caractérisé par* $\begin{cases} Pu \in C \\ \mathfrak{Re}\langle u - Pu, v - Pu\rangle = 0. \end{cases}$

Preuve. Soit $u \in \mathbb{H}$, comme $d(u, C) = \inf\{\|v - u\|, v \in C\} \in \overline{C}$, il existe une suite $(v_n)_n$ de C telle que

$$\lim_n \|v_n - u\| = d(u, C).$$

Montrons que $(v_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{H}$. Par l'identité du parallélogramme on a,

$$\left\|\frac{(v_n - u) - (v_m - u)}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{(v_n - u) + (....)}{2}\right\| = \frac{1}{2}\Big(\|v_n - u\|^2 + \|v_m - u\|^2\Big),$$

adelsaddi

ou encore,

$$\begin{aligned}\|\frac{v_n - v_m}{2}\|^2 &= \frac{1}{2}\Big(\|v_n - u\|^2 + \|v_m - u\|^2\Big) - \Big\|\frac{v_n + v_m}{2} - u\Big\|^2 \\ &< \frac{1}{2}\Big(\|v_n - u\|^2 + \|v_m - u\|^2\Big) - d(u, C)^2\end{aligned}$$

D'où $\lim\limits_{n,m} \|v_n - v_m\| = 0$.

Ainsi $(v_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{H}$ qui est complet. Donc $(v_n)_n$ est converge dans $\mathbb{H}$.

Soit $Pu = \lim\limits_n v_n$, comme $(v_n)_n \subset C$ et C fermé, alors $Pu \in C$ tel que

$$\begin{aligned}\|Pu - u\| &= \|\lim_n v_n - u\| \\ &= \lim_n \|v_n - u\| \\ &= d(u, C.)\end{aligned}$$

Supposons qu'il existe Pu et $P'u$ deux éléments de C tels que

$$\|Pu - u\| = \|P'u - u\| = d(u, C),$$

on a :

$$\begin{aligned}\Big\|\frac{Pu + P'u}{2} - u\Big\|^2 &= \Big\|\frac{(Pu - u) + (P'u - u)}{2}\Big\|^2 \\ &= \frac{1}{2}\Big(\|Pu - u\|^2 + \|P'u - u\|^2\Big) - \frac{1}{4}\|Pu - P'u\|^2 \\ &\leq d(u, C)^2 - \frac{1}{4}\|Pu - P'u\|^2.\end{aligned}$$

Si $Pu \neq P'u$ on obtient $\Big\|\frac{Pu+P'u}{2} - u\Big\|^2 < d(u, C)^2$ ce qui contredit la définition de $d(u, C)$ puisque $\frac{Pu+P'u}{2} \in C$.

Enfin, soit $v \in C$, pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $(1 - \lambda)Pu + \lambda v \in C$, d'où

$$\|u - Pu\|^2 = d(u, C)^2 \leq \|(1 - \lambda)Pu + \lambda v - u\|,$$

D'où :

$$\begin{aligned}0 &\leq \|(1 - \lambda)Pu + \lambda v - u\|^2 - \|u - Pu\|^2 \\ &\leq \|(Pu - u) + \lambda(v - Pu)\|^2 - \|u - Pu\|^2 \\ &\leq \|Pu - u\|^2 + \lambda^2\|v - Pu\|^2 + 2\lambda\mathfrak{Re}\langle Pu - u, v - Pu\rangle - \|u - Pu\|^2 \\ &\leq \lambda(\lambda\|v - Pu\|^2 - 2\mathfrak{Re}\langle u - Pu, v - Pu\rangle).\end{aligned}$$

adel saddi

Donc pour tout $v \in C$,

$$R\langle u - Pu, v - Pu\rangle \leq 0.$$

■

Remarque 5.3.3. *Le theorème prècedent peut s'appliquer en remplaçant le convexe fermé C par un sous espace vectoriel fermé et plus précisement on peut énoncer le théorème suivant.*

Théorème 5.3.4. *Soit $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert et F un sous espace vectoriel fermé de $\mathbb{H}$. Alors il existe une application linéaire continue P de $\mathbb{H} \longrightarrow F$ telle que*

$$\|u - Pu\| = d(u, F), \ \forall\, u \in \mathbb{H}.$$

L'application P est dite la projection orthogonale sur F, $P : \mathbb{H} \longrightarrow F$ caracterisée par :

$$\begin{cases} Pu \in F, \forall\, u \in \mathbb{H} \\ u - Pu \in F^{\perp}. \end{cases}$$

Preuve. Soit $u \in \mathbb{H}$, l'existence et l'unicité de P est assurée par le théorème précedente par la linéarité de P. On remplace succesivement v par $-v$, iv et $-iv$ dans $\mathfrak{Re}\langle u - Pu, v\rangle \leq 0$, pour $v \in F$, on obtient $\langle u - Pu, v\rangle \geq 0$, d'où $\mathfrak{Re}\langle u - Pu, v\rangle = 0$, $\forall\, v \in F$, de plus,

$$\begin{aligned} \mathfrak{Re}\langle u - Pu, iv\rangle = 0 \ &\Longleftrightarrow \ \mathfrak{Re}(i\langle u - Pu, v\rangle) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \ Im(\langle u - Pu, v\rangle) = 0. \end{aligned}$$

Donc $\langle u - Pu, v\rangle = 0$, $\forall\, v \in F$.
Si $u, u' \in \mathbb{H}$ on a $Pu + Pu' \in F$ et $\langle u + u' - (Pu + Pu'), v\rangle = \langle u - Pu, v\rangle + \langle u' - Pu', v\rangle = 0$, $\forall\, v \in F$.
Ainsi $P(u + u') = Pu + Pu'$.
Si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lambda Pu \in F$ et $\langle \lambda u - \lambda Pu, v\rangle = \lambda\langle u - Pu, v\rangle = 0$, $\forall\, v \in F$.. D'où $\lambda Pu = P(\lambda u)$, P est linéaire. De plus, on a $0 \in F$, d'où $\|u - Pu\| = d(u, F) \leq \|u\|$.
$\Longrightarrow \|Pu\| \leq 2\|u\|$. Ceci prouve que P est continue. ■

Remarque 5.3.5. *Si F est un sous espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert $\mathbb{H}$ alors la projecion orthogonale P sur F vérifie*

adel saddi

1. $\forall\, u \in \mathbb{H}$, $u - Pu \in F^{\perp}$.
2. $\forall\, u \in \mathbb{H}$, $\langle u - Pu, Pu\rangle = 0$. *D'où*

$$\begin{aligned} \|Pu\|^2 &= \langle u, Pu\rangle \\ &\leq \|u\|\|Pu\|. \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \|Pu\| \leq \|u\|$.

3. $\forall\, u \in F$, $Pu = u$.
4. $\forall\, u \in \mathbb{H}$, $P^2u = Pu$. *Donc* $||P|| = 1$.

Proposition 5.3.6. *Soient $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert et F un sous espace vectoriel fermé de $\mathbb{H}$. Alors $\mathbb{H} = F \oplus F^{\perp}$.*

Preuve. $\forall\, u \in \mathbb{H}$, $u = Pu + (u - Pu) \in F + F^{\perp}$ où P est la projection orthogonale sur F. De plus, si $v \in F \bigcap F^{\perp}$ alors $\|v\|^2 = \langle v, v\rangle = 0 \Longrightarrow v = 0$.
Ainsi $F \bigcap F^{\perp} = \{0\}$ et $\mathbb{H} = F \oplus F^{\perp}$. ■

Corollaire 5.3.7. *Soit $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert et F un sous espace vectoriel de $\mathbb{H}$, alors F est dense dans $\mathbb{H}$ si et seulement si $F^{\perp}$ est reduit au $\{0\}$.*

Preuve. On a $\mathbb{H} = \overline{F} \oplus \overline{F}^{\perp} = \overline{F} \oplus F^{\perp}$. D'où $\overline{F} = H \Longleftrightarrow F^{\perp} = \{0\}$. ■

5.4 Dualité et convergence faible

Théorème 5.4.1. *(Réprèsentation de Riesz)*
Soit $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert et $f \in \mathbb{H}^*$ l'espace dual topologique de $\mathbb{H}$ ($\mathbb{H}^* = \{f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{K}$linéaire continue$\}$) Alors il existe $u \in \mathbb{H}$ tel que pour tout $v \in \mathbb{H}$, $f(v) = \langle v, u\rangle$.
De plus, u est l'unique point réalisant le munimum de la fonction

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \frac{1}{2}\|v\|^2 - \mathfrak{Re}(f(v)). \end{aligned}$$

adel saddi

L'application qui à tout $f \in \mathbb{H}^*$ on fait associer l'unique vecteur $v \in \mathbb{H}$ tel que $f(.) = \langle ., u\rangle$ est une bijection antilinéaire isométrique (une application φ est antilinéaire si : $\varphi(\alpha x + \beta y) = \overline{\alpha}\varphi(x) + \overline{\beta}\varphi(y)$).

Ce théorème permet d'identifier un espace de Hilbert $\mathbb{H}$ avec son dual topologique $\mathbb{H}^*$.

Preuve. Soit $f \in \mathbb{H}^*$, Si $f = 0$, on choisit $u = 0$ pour l'existence :

Si $f \neq 0$, $\ker(f)$ est un sous espace vectoriel fermé différent de $\mathbb{H}$. D'après la proposition [**?**], on a $\mathbb{H} = \ker(f) \oplus (\ker(f))^{\perp}$, il existe alors $u' \in (\ker(f))^{\perp} \setminus \ker(f)$ et donc $\langle f(u')v - f(v)u', u'\rangle = 0$, $\forall\, v \in \mathbb{H}$.

Autrement dit

$f(v) = \frac{\langle f(u')v, u'\rangle}{\|u'\|^2} = \langle v, \frac{\overline{f(u')}}{\|u'\|^2}u'\rangle$, $\forall\, v \in \mathbb{H}$.

D'où l'existence de u, en posant $u = \frac{\overline{f(u')}}{\|u'\|^2}u' \in \mathbb{H}$.

Pour ce vecteur u et pour tout $v \in \mathbb{H}$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|v\|^2 - \mathfrak{Re}(f(v)) &= \frac{1}{2}\|v\|^2\mathfrak{Re}\langle v, u\rangle \\
&= \frac{1}{2}(\|v\|^2 - 2\mathfrak{Re}\langle v, u\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(\|v - u\|^2 - \|u\|^2).
\end{aligned}$$

qui est munimal pour $v = u$.

De plus $\varphi : f \in \mathbb{H}^* \longrightarrow u \in \mathbb{H}$.

Si $f, g \in \mathbb{H}^*$, $\quad \alpha \in \mathbb{K}$, $\quad \varphi(f + g) = w/(f + g)(v) = \langle v, w\rangle$,

mais $(f + g)(v) = f(v) + g(v) = \langle v, u\rangle + \langle v, u'\rangle = \langle v, u + u'\rangle$, pour tout $v \in \mathbb{H}$, d'où :

$$\begin{aligned}
\varphi(f + g) &= w \\
&= u + u' \\
&= \varphi(f) + \varphi(g).
\end{aligned}$$

Si $\varphi(\lambda f) = w'$ alors $(\lambda f)(v) = \langle v, w'\rangle$.

et

$$(\lambda f)(v) = \lambda f(v) = \lambda\langle v, u\rangle = \langle v, \overline{\lambda}u\rangle.$$

adel saddi

D'où $\varphi(\lambda f) = w = \overline{\lambda} u = \overline{\lambda}\varphi(f)$.

ψ injective :

$\varphi(f) = 0 \Longrightarrow f(v) = \langle v, 0\rangle = 0, \quad \forall v \in \mathbb{H} \Longrightarrow f = 0$.

φ est surjective si $u \in \mathbb{H}$, alors f définie par $f(v) = \langle v, u\rangle \in \mathbb{H}^*$ et $\varphi(f) = u$.

$\|\varphi(f)\| = \|u\|$ et $f(v) = \langle v, u\rangle$. Alors

$$|f(v)| = |\langle v, u\rangle| \leq \|u\|\|v\| \Longrightarrow \|f\| \leq \|u\|.$$

Et pour $v = \frac{u}{\|u\|}$, si $f \neq 0$, on a $\|v\| = 1$, et $|f(v)| = \langle \frac{u}{\|u\|}, u\rangle = \|u\|$.

Si $f = 0$, alors $\varphi(f) = 0$ et $\|\varphi(f)\| = 0$. D'où $\|f\| = \|u\| = \|\varphi(f)\|$.

Autrement dit, φ est une isométrie antilinéaire. ■

Définition 5.4.2. *Soient $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert et $(u_n)_n$ une suite de $\mathbb{H}$. On dit que $(u_n)_n$ converge faiblement vers $u \in \mathbb{H}$ si $\forall\, v \in \mathbb{H}$, $(\langle u_n, v\rangle)_n$ converge vers $\langle u, v\rangle$.*

On note $u_n \rightharpoonup u$, $(n \longrightarrow +\infty)$.

Remarque 5.4.3. *Dans un espace de Hilbert : $u_n \rightharpoonup u \Longleftrightarrow \forall\, f \in \mathbb{H}^*$, $f(u_n) \longrightarrow f(u)$.*

Dans un espace vectoriel normé X : $(u_n)_n$ converge faiblement vers $x \in X$ si pour tout $f \in X^*$, $(f(u_n))_n$ converge vers $f(x)$.

Exemple 5.4.4. *Sur $l^2(\mathbb{N}) = \{x = (x_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}, \sum_{n\geq 0} |x_n|^2 < \infty\}$.*

On pose :

$$\begin{array}{rcl} T_n : l^2(\mathbb{N}) & = & l^2(\mathbb{N}) \\ x = (x_0, \ldots, x_n, \ldots) & \longmapsto & T_n x = (0, \ldots, 0, x_{n+1}, \ldots). \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} V : l^2(\mathbb{N}) & = & l^2(\mathbb{N}) \\ x = (x_n)_{n\geq 0} & \longmapsto & V_n(x) = (\frac{x_0}{n}, \frac{x_1}{n}, \ldots, \frac{x_n}{n}, \ldots). \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} w_n : l^2(\mathbb{N}) & \longrightarrow & l^2(\mathbb{N}) \\ x = (x_n)_{n\geq 0} & \longmapsto & w_n x = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n+1\, fois}, x_0, \ldots). \end{array}$$

adel saddi

On remarque que la convegence forte entraine la convergence faible. $|\langle x_n - x, y\rangle| \leq \|x_n - x\|\|y\|$.
On a $\forall\, x \in l^2(\mathbb{N})$, $\|T_n x\| = \sum_{k\geq n+1} |x_k|^2 \longrightarrow 0$ *(lorsque* $n \longrightarrow +\infty$*)).*
D'où $T_n x \longrightarrow 0 \Longrightarrow T_n x \rightharpoonup 0$.
De même $\forall\, x \in l^2(\mathbb{N})$.

$$\begin{aligned}
\|V_n x\|^2 &= \sum_{k\geq 0} |\frac{x_k}{n}|^2 \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{k\geq 0} |x_k|^2 \\
&= \frac{1}{n^2}\|x\|^2.
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \|V_n x\| = \frac{1}{n}\|x\| \longrightarrow 0$ *quand* $n \longrightarrow +\infty \Longrightarrow V_n x \longrightarrow 0 \Longrightarrow V_n x \rightharpoonup 0$.
Cependant, $\forall\, x \in l^2(\mathbb{N})$,

$$\|w_n x\|^2 = \sum_{k\geq 0} |x_k|^2 = \|x\|, \quad \forall\, n.$$

D'où $w_n \nrightarrow 0$ *mais pour tout élément* e_n *de la base hilbertienne de* $l^2(\mathbb{N})$*, on a :*
$\langle w_n x, e_k\rangle = 0,\ \forall\, n \geq k+1$.
D'où $\lim_n \langle w_n x, e_k\rangle = 0$, $\forall\, k \geq 0$. *Ainsi* $\lim_n \langle w_n x, v\rangle = 0$, $\forall\, v \in l^2(\mathbb{N})$.
ou encore $w_n x \rightharpoonup 0, \quad (n \longrightarrow +\infty)$.

Théorème 5.4.5. *Toute suite faiblement convergente dans un espace de Hilbert est bornée.*

Preuve. Soit $(u_n)_n$ une suite faiblement convergente d'un espace de Hilbert $\mathbb{H}$. Soit $u_n \rightharpoonup u$. $\forall\, n$, posons

$$\begin{aligned}
T_n : \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{K} \\
v &\longmapsto \langle v, u_n\rangle.
\end{aligned}$$

$\forall\, n$, T_n est une forme linéaire continue et $\|T_n\| = \|u_n\|$ comme $(u_n)_n$ faiblement convergente. Alors pour tout $v \in \mathbb{H}$, $(\langle v, u_n\rangle)_n$ convergente dans $\mathbb{K}$, donc bornée, autrement dit $\forall\, v \in \mathbb{H}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|\langle v, u_n\rangle| \leq r_v$, pour une certaine constante $r_v > 0$.
ou encore, $\forall\, v \in \mathbb{H}$, il existe $M_v > 0$ tel que $|T_n v| \leq M_v$. D'après le théorème de Banach Steinhaus il existe $M > 0$, $\|u_n\| = \|T_n\| \leq M$, $\forall\, n$. D'où la suite $(u_n)_n$ est bornée. ■

adel saddi

Proposition 5.4.6. *Soient X espace vectoriel normé (non nécessairement Banach), Y espace de Banach et A est une partie dense de X.*
Si $(T_n)_n$ est une suite d'applications de $\mathcal{L}(X,Y)$ telle que

1. $\sup_n \|T_n\| < \infty$.
2. $\forall\, x \in A$, $(T_n x)_n$ *est convergente.*

Alors, il existe $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ unique tel que $(T_n)_n$ converge (simplement) fortement sur X vers T. De plus, on a $\|T\| \leq \liminf_n \|T_n\|$.

Preuve. Soient $x \in X$ et $\varepsilon > 0$.
D'après la densité de A dans X, il existe $x' \in A$ tel que $\|x - x'\| < \frac{\varepsilon}{3\sup\|T_n\|}$.
Comme $(T_n x')_n$ est convergente, donc elle est de Cauchy. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n, m \geq N_1$

$$\|T_n(x') - T_m(x')\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ainsi $\forall\, n, m \geq N_1$.

$$\begin{aligned}
\|T_n(x) - T_m(x)\| &\leq \|T_n(x) - T_n(x')\| + \|T_n(x') - T_m(x')\| + \|T_m(x') - T_m(x)\| \\
&\leq \|T_n\|\|x - x'\| + \|T_n(x') - T_m(x')\| + \|T_m\|\|x - x'\| \\
< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

$(T_n(x))_n$ est de Cauchy dans Y qui est complet alors $(T_n(x))_n$ est convergente.
Soit $Tx = \lim_n T_n x$.
T est une application linéaire de X dans Y. En effet : Si $x, x' \in X$, $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors

$$\begin{aligned}
T(\alpha x + x') &= \lim_{n \longrightarrow +\infty} T_n(\alpha x + x') \\
&= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \Big(T_n(\alpha x) + T_n(x')\Big) \\
&= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \alpha T_n(x) + \lim_{n \longrightarrow +\infty} T_n(x') \\
&= \alpha T x + T x'.
\end{aligned}$$

adel saddi

On a $\forall\, x \in X$

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= \|\lim_n T_n x\| \\ &= \lim_n \|T_n x\| \\ &\leq \Big(\liminf_n \|T_n\|\Big)\|x\|. \end{aligned}$$

D'où $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ et $\|T\| \leq \liminf_n \|T_n\|$. ■

Proposition 5.4.7. *Toute suite bornée dans un espace de Hilbert séparable possède une sous suite faiblement convergente.*

Preuve. Soit $(x_k)_k$ une suite dense dans l'espace de Hilbert séparable $\mathbb{H}$. Si $(u_n)_n$ une suite bornée de $\mathbb{H}$. Alors, considérons la suite $(T_n)_n$ des formes linéaires continues associées à $(u_n)_n$ par identification de $\mathbb{H}$ à $\mathbb{H}^*$. $\forall\, k$, $(T_n(x_k))_n$ est bornée dans $\mathbb{K}$. Par le procédé de la diagonale de Cantor, il existe une sous suite $(T_{n_j}(x_{k_j}))_j$ convergente pour tout k. C'est à dire la suite $(T_{n_j})_j$ convergente est uniformement bornée et converge fortement sur une partie dense de $\mathbb{H}$. D'après la proposition précédente. $\forall\, v \in \mathbb{H}$, $(T_{n_j}(v))_j$ converge ou encore $\forall\, v \in \mathbb{H}$, $(\langle v, u_{n_j}\rangle)$ converge. Ainsi la sous-suite $(u_{n_j})_j$ est faiblement convergente dans $\mathbb{H}$. ■

Remarque 5.4.8. *En fait l'hypothèse de séparabilité de l'espace de Hilbert peut être éliminer. Cette hypothèse n'est pas nécéssaire et on a le résultat général suivant.*

Théorème 5.4.9. *Toute suite bornée d'un espace de Hilbert possède une sous suite faiblement convergente*

Preuve. Soit $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert et $(u_n)_n$ une suite bornée de $\mathbb{H}$. Soit $F = \overline{vect\{u_n,\, n\}}$ est un espace vectoriel séparable, fermé, dénombrable et dense dans H, donc F est un espace de Hilbert séparable. D'après la proposition précédente et d'après le théorème [**?**] la suite $(u_n)_n$ est bornée dans F. Donc elle possède une sous-suite faiblement convergente sur F.

adelsaddi

Soit $v \in \mathbb{H}$, $v = Pv + v - Pv$, où P la projection orthogonale sur F, alors on a $\forall\, v \in \mathbb{H}$

$$\begin{aligned}
\langle u_{n_j}, v\rangle &= \langle u_{n_j}, Pv + v - Pv\rangle \\
&= \langle u_{n_j}, Pv\rangle + \langle u_{n_j}, v - Pv\rangle \\
&= \langle u_{n_j}, Pv\rangle \longrightarrow \langle u, Pv\rangle \ \text{ avec}\, u \in F. \\
&= \langle u, Pv\rangle + \langle u, v - Pv\rangle \\
&= \langle u, v\rangle.
\end{aligned}$$

D'où $(u_{n_j})_j$ converge faiblement sur $\mathbb{H}$. ■

Théorème 5.4.10. *(Théorème de Lax-Milgram)*
Soient $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert et a une forme bilinéaire continue et coercive de $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$. c-à-d Il existe α et $c > 0$ tels que

$$|a(u,v)| \leq c\|u\|\|v\|,$$

$$a(u,u) \geq \alpha\|u\|^2,$$

pour tous $u, v \in \mathbb{H}$. Soit ℓ une forme linéaire continue sur $\mathbb{H}$. Alors il existe un vecteur unique $u \in \mathbb{H}$ tel que $\forall\, v \in \mathbb{H}$, $a(u,v) = \ell(v)$, de plus si a est symétrique $(a(u,v) = a(v,u) \quad \forall\, u, v \in \mathbb{H})$ alors u est l'unique minimun de l'application

$$J : v \in \mathbb{H} \longrightarrow \frac{1}{2}a(u,v) - \ell(v).$$

Preuve. ℓ est une forme linéaire continue sur $\mathbb{H}$ donc d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique $f \in \mathbb{H}$ telle que $\forall\, v \in \mathbb{H}$, $l(v) = \langle v, f\rangle$. De plus par continuité de a, pour tout $u \in \mathbb{H}$, l'application $a_u : v \longrightarrow a(u,v)$ est une forme linéaire continue sur $\mathbb{H}$, il existe alors $b_u \in \mathbb{H}$ tels que $a_u(v) = a(u,v) = \langle v, b_u\rangle$. Posons l'application $A : u \in \mathbb{H} \longrightarrow b_u \in \mathbb{H}$.
A est linéaire et continue. Pour tous $u, v \in \mathbb{H}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ on a :

adel saddi

$\forall\, w \in \mathbb{H}$

$$\begin{aligned}
\langle w, A(u+\lambda v)\rangle &= \langle u, b_{u+\lambda v}\rangle \\
&= a(u+\lambda v, w) \\
&= a(u,w) + \lambda a(v,w) \\
&= \langle w, b_u\rangle + \lambda\langle w, b_v\rangle \\
&= \langle w, Au\rangle + \langle w, \lambda Av\rangle \\
&= \langle w, Au\rangle + \langle w, \lambda Av\rangle \\
&= \langle w, Au + \lambda Av\rangle.
\end{aligned}$$

D'où $A(u+\lambda v) = Au + \lambda Av$.

De plus : $\forall\, u \in \mathbb{H}$

$$\begin{aligned}
\|Au\|^2 &= \langle Au, Au\rangle \\
&= \langle b_u, b_u\rangle \\
&= a(u, b_u) \\
&\leq c\|u\|\|b_u\| \\
&= c\|u\|\|Au\|.
\end{aligned}$$

D'où $\forall\, u \in \mathbb{H}$, $\|Au\| \leq c\|u\|$.

De la coercivité de a on déduit que

$$\forall\, u \in \mathbb{H},\ \langle Au, u\rangle = a(u,u).$$

C'est à dire $\forall\, u \in \mathbb{H}$, $\langle u, Au\rangle = a(u,u) \geq \alpha\|u\|^2$.

D'où $\|Au\| \geq \alpha\|u\|$, $\forall\, u \in \mathbb{H}$.

En particuliér A est injective de plus $R(A)$ est fermé. En effet : Soit $(v_n)_n$ une suite de $R(A)$ convergente vers $v \in \mathbb{H}$, il existe $(u_n)_n \in \mathbb{H}$ tel que $Au_n = v_n$ pour tout n. On a alors

$$\begin{aligned}
\|v_n - v_m\| &= \|Au_n - Au_m\| \\
&= \|A(u_n - u_m)\| \\
&\geq \alpha\|u_n - u_m\|.
\end{aligned}$$

adel saddi

D'où $(u_n)_n$ est de Cauchy dans l'espace de Hilbert $\mathbb{H}$, donc $(u_n)_n$ est convergente. Soit $l = \lim_n u_n$, comme A est continu alors

$$v = \lim_n v_n = \lim_n Au_n = A \lim_n u_n = Au \in R(A).$$

Pour montre la surjectivité de A, il suffit de vérifier que $R(A)^\perp = \{0\}$.
Soit $v \in R(A)^\perp$, on a alors $0 = \langle Au, v\rangle = a(v, v) = \alpha\|v\|^2$.
D'où $v = 0$ et $R(A)^\perp = \{0\}$, donc $R(A)$ est dense dans $\mathbb{H}$, comme $R(A)$ est fermé alors $R(A) = \overline{R(A)} = \mathbb{H}$.
On a demontré que A est bijectif, en particulier, $\forall\, f \in \mathbb{H}$, il existe un unique $u \in \mathbb{H}$ tel que $Au = f$. Donc il existe un unique $u \in \mathbb{H}$ telle que $\forall\, v \in \mathbb{H}$

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \langle v, Au\rangle \\ &= \langle v, f\rangle \\ &= l(v). \end{aligned}$$

Remarque 5.4.11. *A toute forme bilinéaire continue et coercive a sur un espace de Hilbert $\mathbb{H}$, il existe une unique application linéaire continue A sur $\mathbb{H}$ telle que $a(u, v) = \langle v, Au\rangle$, $\forall\, u, v \in \mathbb{H}$. Soit $J(v) = \frac{1}{2}a(u, v) - l(v)$. Si de plus a est symétrique, alors $\forall\, v \in \mathbb{H}$*

$$\begin{aligned} J(u + v) &= \frac{1}{2}a(u + v, u + v) - l(u) \\ &= \frac{1}{2}a(u, u) + \frac{1}{2}a(v, v) + a(u, v) \\ &= J(u) + \frac{1}{2}a(u, v) \\ &\geq J(u) + \alpha\|v\|^2. \end{aligned}$$

D'où $\forall\, v \in \mathbb{H}\backslash\{u\}$, $J(v) > J(u)$.
Donc u est l'unique vecteur réalisant le minimum de l'application J.

■

adel saddi